Uitwerking opgaven quantumcomputing.

opdracht 1.1

Je doet de opdracht met zijn tweeën: de een registreert, de ander neemt waar. Voor dit experiment heb je figuur 1.1 nodig. De afbeelding wordt afgedekt. De registrator onthult de afbeelding. De waarnemer vertelt wat hij ziet, jonge vrouw of oude vrouw. De afbeelding wordt weer bedekt. De registrator turft. Dit wordt 10 x herhaald. Daarna worden de rollen omgekeerd. Zijn er verschillen tussen de waarnemers?

Eigen onderzoek. De resultaten kunnen worden samengevat in een vectordiagram. Zie ook de volgende opgave, 1.2 b en c.

opdracht 1.2

Waarnemer 3 gebruikt een andere basis. Deze basis wordt gevormd door $|J_3>$ en $|O_3>$. Er geldt

$$|J\&O >= 0,9|J_3 > +0,31|O_3 >$$

a) Hoe groot is de kans dat waarnemer 3 een jonge vrouw ziet? En een oude vrouw?

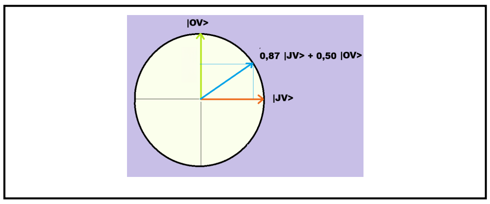
Een andere waarnemer ziet de jonge vrouw met een kans van 75%.

b) Bereken de waarde van a en b.

c) Teken de vectorvoorstelling zoals in figuur 1.2.

Helaas tellen de kwadraten van 0,9 en 0,31 niet op tot 1 wat wel zou moeten. Laten we er van uitgaan dat de amplitude van de oude vrouw klopt.

a. De kans op een oude vrouw is $0{,}31^2$ = 0,096 ofwel 10% en dus is de kans op een jonge vrouw 1- 0,096 = 0,90 dus 90 %.
b. Jonge vrouw heeft als amplitudo a = V0,75 = 0,87 en b= V0,25 = 0.5.
c.



.

opdracht 1.3

a) Hoeveel wandelroutes naar C zijn er als je alleen gebruik mag maken van $\vec{\mathcal{A}}_x$, $\vec{\mathcal{A}}_y$, $\vec{\mathcal{B}}_x$ en $\vec{\mathcal{B}}_y$?

b) Teken de wandelroute $\vec{\mathcal{A}}_x + \vec{\mathcal{B}}_x + \vec{\mathcal{A}}_y + \vec{\mathcal{B}}_y$

c) Teken de wandelroute $\vec{\mathcal{A}}_y + \vec{\mathcal{B}}_x + \vec{\mathcal{A}}_x + \vec{\mathcal{B}}_y$

a. Het gaat om de volgorde van de vier componenten A_x . A_y, B_x en B_y. Iedere volgorde correspondeert met een wandelroute. Er zijn vier plaatsen voor de verplaatsing A_x, Bij elk daarvan zijn er dan nog drie plaatsen in de volgorde voor A_y, twee voor B_x en tenslotte nog maar een voor B_y bij als die keuzes. Dus totaal zijn er 4x3x2x1 = 24 routes!

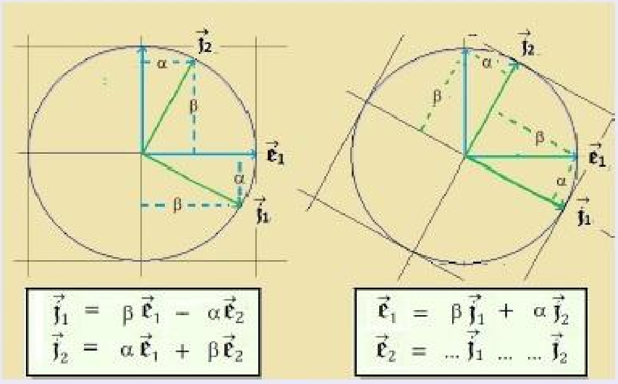
b. $A_x=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $A_y=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$, $B_x=\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$, $B_y=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

Eerst A_x. Je arriveert in (1,0) Dan B_x : nu zit je in het punt (4,0). Vervolgens A_y: je arriveert in (4.2) en tenslotte B_y. Je eindigt in (4,3)

c. Eerst A_y. Je arriveert in (0,2) Dan B_x : nu zit je in het punt (3,2). Vervolgens A_x: je arriveert in (4.2) en tenslotte B_y. Je eindigt in (4,3)

opdracht 1.4

Bekijk figuur 1.5



Figuur 1.5:
Ook basisvectoren hebben componenten.
In basis $\mathbb{E}$ geldt: $\vec{j}_1 = \begin{pmatrix}\beta \\ -\alpha\end{pmatrix}$ en $\vec{j}_2 = \begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix}$

De basisvectoren hebben lengte één. De symbolen α en β geven de lengte van de componenten aan van de basisvectoren in de andere basis.

a) Vul de transformatieregels in fig. 1.5 aan.

In figuur 1.4 is te zien dat $\vec{j}_2$ dezelfde richting heeft als de vector $\vec{\mathcal{A}}$. Hiermee is te berekenen hoeveel keer β groter is dan α.

b) Bereken de verhouding $\frac{\beta}{\alpha}$

a. De componenten van e_2 zijn $\begin{pmatrix}-\alpha \\ \beta\end{pmatrix}$ dus $e_2 = -\alpha j_1 + \beta j_2$

b. De vector A in basis J gelijk aan A j_2 . Hierin is A gelijk aan de lengte van de vector A . In basis E is de vector gelijk aan $A(\alpha e_1 + \beta e_2) = \begin{pmatrix}A\alpha \\ A\beta\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}1 \\ 2\end{pmatrix}$.

Dus $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{2}{1} = 2$

opdracht 1.5

De zogenaamde diagonaalbasis $\mathbb{D}$ heeft als basisvectoren $\vec{\mathfrak{h}}_1$ en $\vec{\mathfrak{h}}_2$. Er geldt:

$$\vec{\mathfrak{h}}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\mathfrak{e}}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\mathfrak{e}}_2$$
$$\vec{\mathfrak{h}}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\mathfrak{e}}_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\mathfrak{e}}_2$$

a) Bereken de coördinaten van $\vec{\mathcal{A}}$ in basis $\mathbb{D}$

b) Bereken de coördinaten van $\vec{\mathcal{B}}$ in basis $\mathbb{D}$

a) In basis $\mathbb{E}$ geldt A = $1e_1 + 2e_2$.

Om de componenten in basis D te vinden moeten we gebruik maken van de relaties $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} h_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} h_2$ en $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} h_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} h_2$.

Dus A = $1 * e_1 + 2 * e_2 =$

$$1 * \left(\frac{1}{\sqrt{2}} h_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} h_2\right) + 2 * \left(\frac{1}{\sqrt{2}} h_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} h_2\right) =$$

$$\frac{3}{\sqrt{2}} h_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} h_2 .$$

Dus in basis D geldt: A $= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

b) In basis $\mathbb{E}$ geldt b $= 3e_1 + 1\,e_2$.

Dezelfde redenering volgend als bij a) krijgen we b $= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

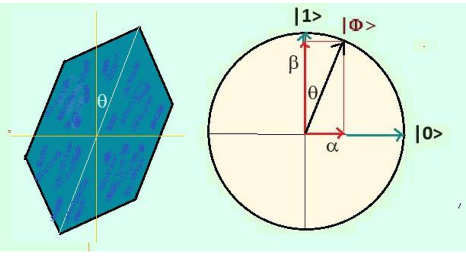
opdracht 1.6

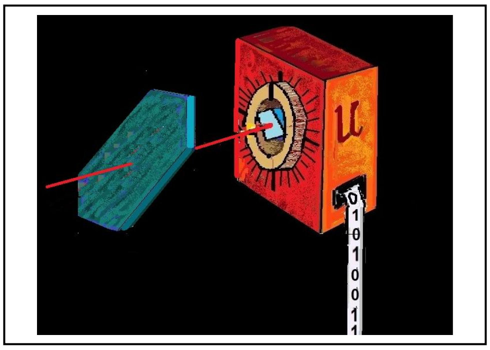
Het polaroidplaatje in figuur 1.9 is over een hoek $\theta = 20$ graden gedraaid.

a) Bereken α en β

b) Bereken de kans op **0** op de lijst van figuur 1.8.

Opgave 1.6 heeft betrekking op figuren 1.9 en 1.8





a) β is de aanliggende zijde en α is de tegenoverliggende zijde.
Dus $\beta = 1 * \cos\theta = \cos 20^{o} = 0{,}94$
en $\alpha = 1 * \sin\theta = \sin 20^{o} = 0{,}34$

b) $P(0) = \alpha^2 = 0{,}34^2 = 0{,}12$ dus de kans is 12%.

opdracht 2.1

Spin heeft richting. De spin kan worden opgevat als een ruimtelijke vector.

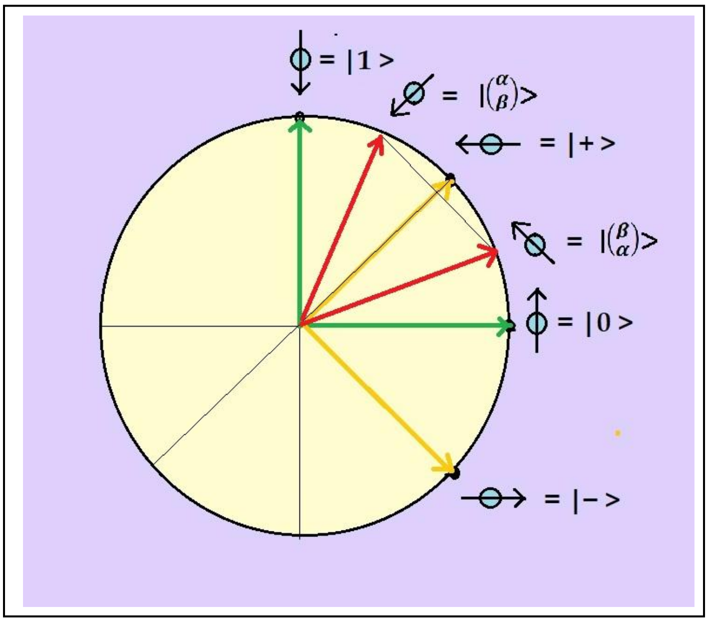
a) Neem figuur 2.2 over.

b) Teken de spin die hoort bij de toestand $|\Psi>$

c) Teken de spin die hoort bij de toestand $\mathcal{X}(|\Psi>)$

a) Zie onder

b) en c)



We nemen een figuur zoals weergegeven in figuur 1.13. De toestandsvectoren |0> en |1> zijn gekozen. De andere toestandsvectoren worden vervolgens gevonden door te interpoleren. Er geldt dat als een toestandsvector over een bepaalde hoek roteert dat dan de spin over een 2x zo grote hoek roteert.
Naar aanleiding van de getekende spin is een interessante discussie mogelijk over het wezen van de quantumfysica. De getekende spin te immers een typisch klassieke weergave. De superpositie van de basistoestanden |0> en |1> heeft in die voorstelling alles te maken met de instelling van het meetapparaat in figuur 1.8 . Overgaan op de basis |+> en |-> geeft een andere superpositie met andere meetuitkomsten. De getekende spin is echter net zo'n abstracte voorstelling als de ingetekende Hilbertvectoren. Het typische quantumkarakter wordt pas zichtbaar in een soort Mach-Zehnder-opstelling zoals behandeld op blz 37 en verder.

opdracht 2.2

Bekijk figuur 2.5. Voor toestand $|\Psi>$ geldt $|\Psi> = \binom{\alpha}{\beta}$

a) Vul aan: $\mathcal{Z}|\Psi> = |\Phi> = \binom{\cdots}{\cdots}$

b) Vul aan: $\mathcal{Z}\mathcal{X}|\Psi> = \binom{\cdots}{\cdots}$

Met behulp van de eenheidscirkel kan de werking van een combinatie-operator eenvoudig worden gevisualiseerd.

c) Neem figuur 2.5 over maar zonder de verticale lijnen.

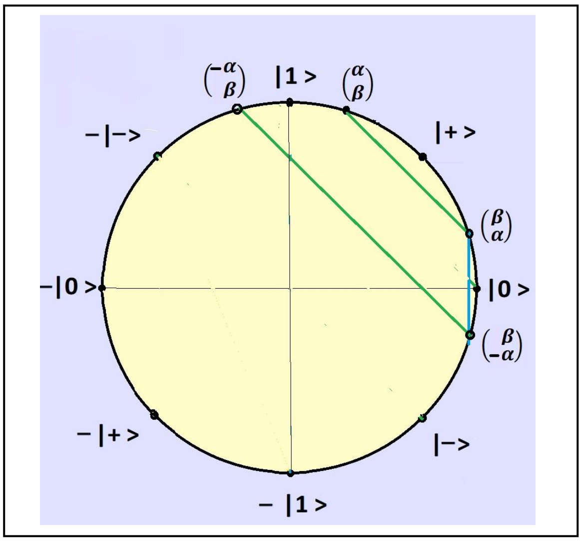
d) Laat in je figuur zien waar de toestand $\mathcal{X}\mathcal{Z}\mathcal{X}\binom{\alpha}{\beta}$ op de eenheidscirkel ligt.

e) Welke toestanden kunnen vanuit $\binom{\alpha}{\beta}$ worden bereikt met alleen de operatoren $\mathcal{X}$ en $\mathcal{Z}$?

a) $Z|\Psi> = Z\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\ -\beta\end{pmatrix}$

b) $ZX|\Psi> = Z\begin{pmatrix}\beta\\ \alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\beta\\ -\alpha\end{pmatrix}$

c) en d) zie hiernaast:



e) Dat zullen acht toestanden zijn:

$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\alpha\\ \beta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\alpha\\ -\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\alpha\\ -\beta\end{pmatrix}$ *en* $\begin{pmatrix}\beta\\ \alpha\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\beta\\ \alpha\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\beta\\ -\alpha\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\beta\\ -\alpha\end{pmatrix}$

opdracht 2.3

a) Bereken $\mathcal{H}(\binom{\alpha}{\beta})$

b) Bereken $\mathcal{XZH}(|\Psi>)$

c) Bereken $\mathcal{HXZ}(|\Psi>)$

d) Hoeveel toestanden kun je bereiken vanuit $|\Psi>$ met alleen de poorten $\mathcal{Z}$, $\mathcal{X}$ en $\mathcal{H}$?

a) $H\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = H(\alpha|0> + \beta|1>) = (\alpha H|0> + \beta H|1>)$

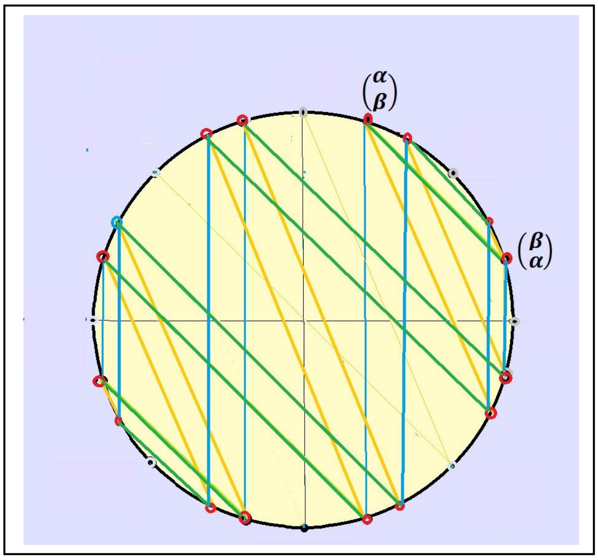
$= \alpha(\frac{1}{\sqrt{2}}|0> + \frac{1}{\sqrt{2}}|1>) + \beta(\frac{1}{\sqrt{2}}|0> - \frac{1}{\sqrt{2}}|1>) =$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha+\beta)\ |0> + \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha-\beta)\ |1> = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\alpha+\beta\\ \alpha-\beta\end{pmatrix}$

b) $XZH\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = XZ(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\alpha+\beta\\ \alpha-\beta\end{pmatrix} = X\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\alpha+\beta\\ -\alpha+\beta\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-\alpha+\beta\\ \alpha+\beta\end{pmatrix}$

c) $HXZ\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = HX\begin{pmatrix}\alpha\\ -\beta\end{pmatrix} = H\begin{pmatrix}-\beta\\ \alpha\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-\beta+\alpha\\ -\beta-\alpha\end{pmatrix}$

d) Vanuit elk punt zijn er drie lijnen te trekken (zie figuur). Z-lijnen zijn blauw, X-lijnen zijn groen en H-lijnen zijn geel.
Dit wordt een graaf genoemd. Uiteindelijk zijn er dan 16 punten , dwz toestanden te bereiken. Vanuit het beginpunt dus 15 andere toestanden.



opdracht 2.4 Er geldt: $|\Psi> = \frac{1}{\sqrt{5}}|0> + \frac{2}{\sqrt{5}}|1>$

a) Bereken $\mathcal{R}_{Y,30^0}(|0>)$ en $\mathcal{R}_{Y,30^0}(|1>)$

b) Bereken $\mathcal{R}_{Y,30^0}(|\Psi>)$

a) Wat de draaioperator doet is te zien in figuur 2.9. Er geldt dat |0> door de operator wordt verandert in cos(30°)|0> + sin(30°)|1> = 0,866 |0> +0,5|1>. En de toestand |1> in -0,5|0> + 0,866|1>.

b) $R_{Y,30^\circ}(\frac{1}{\sqrt{5}}|0> + \frac{2}{\sqrt{5}}|1>) = \frac{1}{\sqrt{5}}R_{Y,30^\circ}|0> + \frac{2}{\sqrt{5}}R_{Y,30^\circ}|1>) =$

$0{,}447($0,866 |0> +0,5|1> + 0,894(-0,5|0> + 0,866|1>) =

$(0{,}387 - 0{,}447)|0> + (0{,}224 + 0{,}774)|1> =$

$-0{,}06\ |0> + 0{,}998\ |1>$

opdracht 2.5

a) Ga naar de website Quantum Inspire: https://www.quantum-inspire.com/ Je krijgt een scherm met oranje-rode kleuren. Klik rechtsboven de Knowledge base aan. Links vind je de quick guide met het onderdeel *working with the*

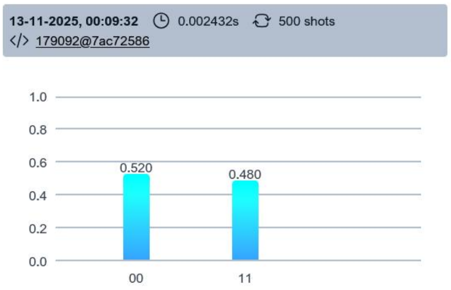
a) De website is veranderd. De editor kan alleen geopend worden als je je hebt aangemeld. Daarvoor moet je een account aanmaken met behulp van een emailadres.
Ook het maken van een programma is veranderd. Wanneer een qubit wordt uitgelezen wordt het resultaat eerst naar een daartoe gereserveerde bit geschreven.
Het programma dat je bijvoorbeeld zou kunnen draaien ziet er als volgt uit:

```
// create a qubit register of 2 qubits and a bit register of 2 bits
qubit[2] q
bit[2] b

// Create a superposition state for qubit 0
H q[0]

// measure both qubits into the bit register
b[0,1] = measure q[0,1]
```

b) De tekst achter de schuine streepjes is commentaar en wordt niet verwerkt door het programma.
Bij de run van bijvoorbeeld 500 shots wordt het resultaat grafisch weergegeven.



c) Demogelijkheid om de ruwe data te bekijken is helaas verdwenen in de vernieuwde opzet.

opdracht 3.1

a) Hoeveel basistoestanden kent de triqubit?

b) Hoeveel basistoestanden kent de pentaqubit?

a) Met een register van drie qubits krijgen we de volgende basistoestanden
0 001 010 011 100 101 110 111
Dus 8

b) $2^5 = 32$

opdracht 3.2
Bekijk het circuit van figuur 3.3. Er kan één poort worden toegevoegd/weggehaald.

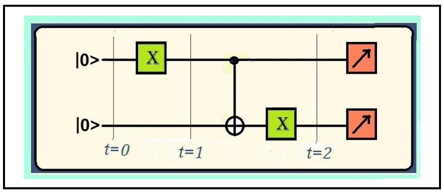
a) Wat is de toestand van het register op t=2?

b) Waar moet welke poort geplaatst worden om de toestand $|\mathbf{10}>$ te krijgen?

c) Waar moet welke poort geplaatst worden om de toestand $|\mathbf{11}>$ te krijgen?

a) Op t=0 is de toestand |00>, op t=1 is dat |10> en op t=2 |11>.

b)



c) Die uitkomst wordt al geleverd door het circuit van de opgave!

opdracht 3.3

Neem aan dat twee qubits in de volgende toestanden verkeren: $|\Phi>=\frac{1}{2}\sqrt{3}\ |\mathbf{0}>+\frac{1}{2}|\mathbf{1}>$ en $|\Psi>=|1>$

a) Bereken $\mathcal{CNOT}(|\Phi>,|\Psi>)$. Distribueer eerst.

b) Teken een circuit met een $\mathcal{CNOT}$-poort en twee uitleesinstrumenten op de lijnen.

Bij uitlezing van de bovenste lijn volgt de volgende reeks nullen en enen: 0-0-1-0-0-1-1-0-1-0-1-1-0-1-0-1-0-0-0-1-0-.

c) Geef de uitlezing op de onderste lijn.

d) Als er honderd uitlezingen hebben plaats gevonden hoeveel nullen zijn er dan ongeveer op de bovenste lijn binnengekomen?

e) En op de onderste lijn?

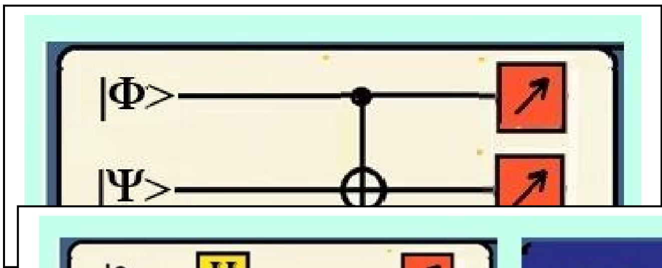
f) Waarom mag je niet zeggen dat na de werking van de $\mathcal{CNOT}$-poort de doelqubit de toestand $|\Psi>=\frac{1}{2}\sqrt{3}|\mathbf{1}>+\frac{1}{2}|\mathbf{0}>$ heeft aangenomen?

a) Cnot $(|\Phi>, |\Psi>)$ $=$ Cnot $(\frac{1}{2}\sqrt{3}|0> + \frac{1}{2}|1>, |1>)$ $=$

$\frac{1}{2}\sqrt{3}$Cnot $(|01> + \frac{1}{2}$ Cnot $(|11>)$ $=$

$\frac{1}{2}\sqrt{3}\,|01> + \frac{1}{2}\ |10>$

b)



c)

d) De eindtoestand van het register is $\frac{1}{2}\sqrt{3}\,|01> + \frac{1}{2}\ |10>$.
Om de kansen te berekenen moeten de amplitudo's worden gekwadrateerd. Dat levert ¾ op voor een uitlezing van **01** en ¼ voor een uitlezing van **10**. Dus dan zou dat 75 nullen voor de bovenste rij moeten opleveren.

e) De onderste rij is de spiegeling van de bovenste rij. Dus daar staan 25% nullen.

opdracht 3.4

a) Bereken $(\frac{1}{2}\vec{e_1} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\vec{e_2}) \otimes (\vec{e_1})$

b) Bereken $(\vec{e_1}) \otimes (\frac{1}{2}\vec{e_1} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\vec{e_2})$

a) Bekijk blz 66.

$$(\tfrac{1}{2}\, e_1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\, e_2) \otimes e_1 =$$

. $$\tfrac{1}{2}\, e_1 \otimes e_1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\, e_2 \otimes e_1 =$$

$$\tfrac{1}{2} * 1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{3} * 0 = \tfrac{1}{2}$$

b) Idem, zelfde uitkomst.

opdracht 3.5

Voor een tensorproduct $\vec{\mathcal{A}} \otimes \vec{\mathcal{P}} =$ geldt

$$\binom{a}{b} \otimes \binom{p}{q} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

a) Leg uit dat moet gelden: abpq=12 .

b) Bereken a, b, p en q.

a) $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap \\ aq \\ bp \\ bq \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

ap=2 en aq =3 en bp =4 en bq = 6
vier vergelijkingen met vier onbekenden.
Als we de twee binnenste componenten van de viervector vermenigvuldigen dan is te zien dat
aq x bp = 12. Vermenigvuldigen we de buitenste twee dan moet gelden ap x bq = 12. Dus geldt ook abpq =12!

b) Volgens de eerste vergelijking geldt p = 2/a. Volgens de tweede vergelijking geldt q =3/a. Vullen we p = 2/a in de derde vergelijking in dan krijgen we b * 2/a = 4 dus b/a = 2 en dus is b = 2a . Kiezen we a = 1 dan hebben we dus als oplossing a=1, b=2, p=2 en q=3. Maar kiezen we a = 2 dan hebben we als oplossing a=2, b=4, p=1 en q=3/2 en ook die oplossing is correct. Conclusie: a kan vrij worden gekozen maar dan liggen de andere drie vast.

opdracht 3.6
Er bestaat geen tensorproduct $\vec{\mathcal{B}} \otimes \vec{\mathcal{R}} =$ waar voor geldt

$$\binom{b}{c} \otimes \binom{r}{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

a) Leg uit waarom niet.

Als je de 3 in de viervector verandert in een 0 is er weer wel een oplossing.

b) Bereken b, c, r en t voor dit geval.

a) Volgens de redenering bij het antwoord van opgave 3.5 moet bcrt gelijk zijn aan het product van de binnenste componenten en aan het product van de buitenste componenten.
Dus bcrt =0*2=0 én bcrt = 1*3 =3. Dat kan natuurlijk niet dus er is geen oplossing en de gezochte vectoren $\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} r \\ t \end{pmatrix}$ bestaan dus niet.

b) Nu geldt br = 1, bt = 0, cr = 2 en ct = 0 .
Dan moet t = 0 zijn.
br= 1 en cr =2 Dan kunnen we b weer vrij kiezen en verder moet r = 1/b zijn en c = 2/b.

opdracht 3.7
Kan een viervector met twee nullen in de productruimte zitten?

Ja . Kijk naar een willekeurig product. $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap \\ aq \\ bp \\ bq \end{pmatrix}$

Stel: slechts een van de vier getallen a,b,p en q is gelijk aan 0. Dan zitten er twee nullen in de viervector ongeacht de waarde van de drie anderen. Er zijn dus oneindig veel viervectoren met twee nullen!

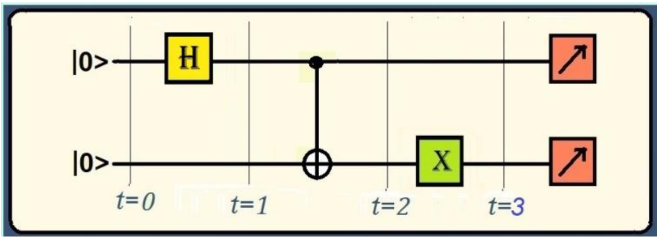
opdracht 3.8

Bekijk figuur 3.6. Op t=0 is de toestand van de biqubit gelijk aan $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

a) Wat is de toestand op t=1?

b) Wat is de toestand op t=2?

c) Wat is de toestand op t=3?



a) 1^e methode:
Zet de viervector weer om in een product van twee tweevectoren (blz 66). Laat de Hadamardpoort werken op de eerste poort en zet het nieuwe product weer om in een viervector.

$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ dus als we h op de eerste qubit laten werken krijgen we h

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

2e methode:

Schrijf de biqubit als **|00>** en laat de poort werken op de eerste qubit:

Dat wordt dan: $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (|00>+|10>) en volgens blz 66 is dat gelijk aan

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

b) De cnot draait de laatste twee componenten om (zie fig. 3.5). Dus

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

c) En hier ontstaan dus problemen. Om dit te ervaren was deze opdracht bedoeld! Want de eerste methode hierboven beschreven werkt dus niet meer. Na de werking van de cnot is een zogenaamde verstrengelde toestand ontstaan. Het is geen tensorproduct meer. We moeten nu de methode toepassen die op blz 72 en 73 wordt beschreven. We herschrijven de toestand van b als volgt:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10> \; +|01>)$$

Door x te laten werken op de tweede qubit krijgen we

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(|11> \; +|00>)$$

Dit is de zogenaamde eerste Bell-toestand van de biqubit.

opdracht 3.8
Stel de biqubit in figuur 3.8 bevindt zich op t=0 in de willekeurige toestand: $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\\ \delta\end{pmatrix}$

a) Bereken de toestand op t=1 en t=2 in het linkerplaatje van figuur 3.8

b) Bereken de toestand op t=1 en t=2 in het middelste plaatje van figuur 3.8

c) Is het onderschrift terecht?

d) Wat doet de combinatiepoort $\mathcal{X}_1\mathcal{H}_2$ (rechterplaatje) met de toestand?

a) We schrijven de toestand weer als
$\alpha\ |00\rangle + \beta\ |01\rangle + \gamma\ |10\rangle + \delta\ |11\rangle$
Op t=1 is de eerste qubit omgepoold dus de toestand is nu
$\alpha\ |10\rangle + \beta\ |11\rangle + \gamma\ |00\rangle + \delta\ |01\rangle$. En dat is dan de toestand op t=1 en deze toestand kan ook worden weergegeven met een viervector:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\gamma\\ \delta\\ \alpha\\ \beta\end{pmatrix}$$

Op t=2 wordt de tweede qubit omgezet in een superpositie. Het aantal termen gaat dan verdubbelen:

$$\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(|10\rangle + |11\rangle) + \frac{\beta}{\sqrt{2}}(|10\rangle - |11\rangle) + \frac{\gamma}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |01\rangle) + \frac{\delta}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |01\rangle)$$

Gelijke termen samennemen levert de toestand op t=2 op:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\{(\gamma+\delta)\ |00\rangle + (\gamma-\delta)\ |01\rangle + (\alpha+\beta)\ |10\rangle + (\alpha-\beta)\ |11\rangle\}$$

of ook wel $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\gamma+\delta\\ \gamma-\delta\\ \alpha+\beta\\ \alpha-\beta\end{pmatrix}$

b) We schrijven de toestand weer als
α **|00>** + β **|01>** + γ **|10>** + δ **|11>**

Op t=1 is de tweede qubit omgezet in een superpositie. Het aantal termen gaat dan verdubbelen:

$\frac{\alpha}{\sqrt{2}}$(**|00> +|01>) +** $\frac{\beta}{\sqrt{2}}$(**|00> - |01>) +** $\frac{\gamma}{\sqrt{2}}$(**|10> + |11>) +** $\frac{\delta}{\sqrt{2}}$(**|10> - |11>)**

$\frac{1}{\sqrt{2}}$\{ ($\alpha+\beta$) **|00> +** ($\alpha-\beta$) **|01> +** ($\gamma+\delta$) **|10> +** ($\gamma-\delta$) **|11>** \}

Nu wordt de eerste qubit omgepoold dus de toestand op t=2 is nu

$\frac{1}{\sqrt{2}}$\{ ($\alpha+\beta$) **|10> +** ($\alpha-\beta$) **|11> +** ($\gamma+\delta$) **|00> +** ($\gamma-\delta$) **|01>** \}

En ook hier kunnen we het hele proces weer weergeven met viervectoren:

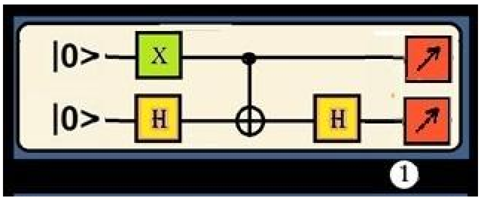
$$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\\ \delta\end{pmatrix} \to \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\alpha+\beta\\ \alpha-\beta\\ \gamma+\delta\\ \gamma-\delta\end{pmatrix} \to \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\gamma+\delta\\ \gamma-\delta\\ \alpha+\beta\\ \alpha-\beta\end{pmatrix}$$

c) De antwoorden van a) en b) zijn hetzelfde. De volgorde van de twee bewerkingen verschilt maar het resultaat blijft gelijk.

d) $$X_1\, h_2 \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\\ \delta\end{pmatrix} = h_2\, X_1 \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\\ \delta\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\gamma+\delta\\ \gamma-\delta\\ \alpha+\beta\\ \alpha-\beta\end{pmatrix}$$

opdracht 3.9

Bereken wat uitlezing bij deze circuits zal opleveren.



We hebben dus de volgende bewerkingen achter elkaar.

Stap 1 : X_1 **|00> = |10>,**

Stap 2 : h_2 **|10> =** $\frac{1}{\sqrt{2}}$**(|10> + |11>)**

De cnot met de eerste qubit als control en de tweede als target werkt dus op $\frac{1}{\sqrt{2}}$**(|10> + |11>)**. In figuur 3.5 is te zien wat de poort doet met de twee termen. Beide termen gaan flippen want de control staat op 1. Het resultaat is dat er niets verandert.

Stap 3 : $cnot_{12}$ { $\frac{1}{\sqrt{2}}$**(|10> + |11>)** } = $\frac{1}{\sqrt{2}}$**(|11> + |10>)**

Tenslotte werkt de poort h_2 nog een keer.

Stap 4: $h_2 \frac{1}{\sqrt{2}}($ **|11> + |10>)** $= \frac{1}{\sqrt{2}} h_2($ **|11> +** $\frac{1}{\sqrt{2}} h_2($ **|10> =**

$\frac{1}{2}\{($ **|10> - |11>)** + $\frac{1}{2}\{($ **|10> + |11>)** =

$\frac{1}{2}\{$ 2 **|10>** $\}$ = **|10 >**

We kunnen het hele vraagstuk ook oplossen met viervectoren.

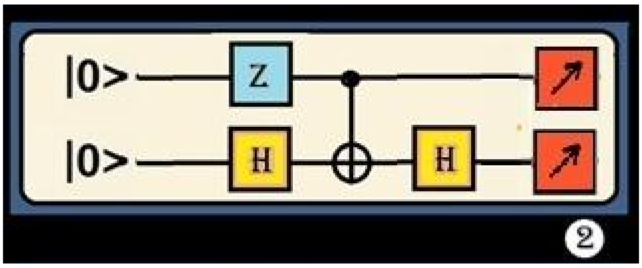
De eerste stap kunnen we zetten met behulp van het antwoord van 38d.

$$X_1\, h_2 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \gamma+\delta \\ \gamma-\delta \\ \alpha+\beta \\ \alpha-\beta \end{pmatrix} \text{ dus } X_1\, h_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ en dat komt overeen met de toestand $\frac{1}{\sqrt{2}}($ **|10> + |11>).**

Bij de tweede stap werkt de cnot. Deze draait de laatste twee componenten om (zie figuur 3.5). Maar omdat het hier gaat om de verwisseling van twee nullen is er geen effect!

Voor de laatste stap gebruiken we figuur 3.7:

$$h_2 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \alpha+\beta \\ \alpha-\beta \\ \gamma+\delta \\ \gamma-\delta \end{pmatrix} \text{ dus } h_2 \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Vier stappen:

Z_1 **|00 > = |00 >**

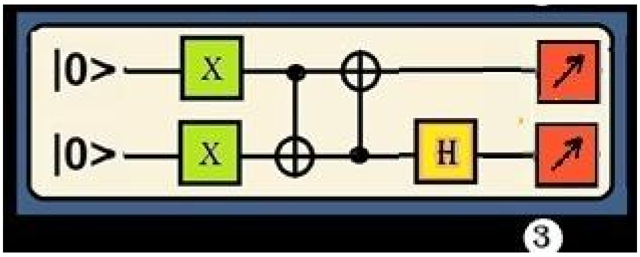
h_1 **|00 > =** $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (**|00 > + |01 >**

$\text{cnot}_{12}\{\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\ |00> + |01>)\ \} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\ |00> + |01>)$

$h_1\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\ |00> + |01>) \quad = \frac{1}{\sqrt{2}}\ (h_1|00> + h_1|01>) = |00>$

En in de taal van de viervectoren:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$



Hier is sprake van vijf stappen. We beginnen met de eerste twee:

$X_2\ x_1\ |00> = X_2|10> = |11>$

Daarna werkt het tweetal $\text{cnot}_{21}\ \text{cnot}_{12}$ op $|11>$

$\text{cnot}_{21}\ \text{cnot}_{12}\ |11> = \text{cnot}_{21}\ |10> = |10>$

Tenslotte wordt Hadamard losgelaten op de tweede qubit. Dat geeft:

$h_2\ |10> = \frac{1}{\sqrt{2}}(\ |10> + |11>)$

Dus $\text{Circuit}\ |00> = \frac{1}{\sqrt{2}}(\ |10> + |11>)$ ofwel $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$

EXTRA

We zouden nog kunnen vragen wat het circuit doet met $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$:

Dat kunnen we ook opschrijven als

Circuit { α**|00>** **+** β**|01>** **+** γ **|10>** **+** δ **|11>** } = ?

α Circuit **|00>** + β Circuit **|01>** +

+ γ Circuit **|10>** + δ

Circuit **|11> =?**

Wat de termen inhouden moet worden onderzocht.

Circuit **|00> =** $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Zie boven.

Circuit **|01> = ?**

X_2 x_1 **|01>** = X_2**|11>** = **|10>**

$cnot_{21}$ $cnot_{12}$ **|10>** = $cnot_{21}$ **|11>** **=** **|01>**

h_2 **|01> =** $\frac{1}{\sqrt{2}}$(|00> - |01>)

Dus Circuit **|01> =** $\frac{1}{\sqrt{2}}$(|00> - |01>) **=** $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Circuit **|10> =?**

X_2 x_1 **|10>** = X_2**|00>** = **|01>**

$cnot_{21}$ $cnot_{12}$ **|01>** = $cnot_{21}$ **|01>** **=** **|11>**

h_2 **|11> =** $\frac{1}{\sqrt{2}}$(|10> - |11>)

Dus Circuit **|10> =** $\frac{1}{\sqrt{2}}$(|10> - |11>) = $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Circuit $|11\rangle = ?$

$X_2\, x_1\, |11\rangle = X_2|10\rangle = |00\rangle$

$\text{cnot}_{21}\, \text{cnot}_{12}\, |00\rangle = \text{cnot}_{21}\, |00\rangle = |00\rangle$

$h_2\, |00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |01\rangle)$

Dus Circuit $|11\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |01\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}.$

En dus kunnen we zeggen:

$$\text{Circuit}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\\ \delta\end{pmatrix} = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{\beta}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix} + \frac{\gamma}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix} + \frac{\delta}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}. = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\delta+\beta\\ \delta-\beta\\ \alpha+\gamma\\ \alpha-\gamma\end{pmatrix}$$

opdracht 4.1

In deze opdracht ga je weer werken met de quantumcomputer van Delft. Je gaat kijken hoe de output er uitziet als je twee maximaal verstrengelde qubits gaat uitlezen. https://www.quantum-inspire.com/

a) Doe een run op de quantumcomputer van Delft:

- Ga via de *knowledge-base* naar de *quick guide* met het onderdeel *working with the editor.*
- Even scrollen en je ziet een voorbeeld met rechtsboven *open the editor*: klik aan.
- Je bent nu in de editor met een programma dat al werkt. Het is het programma van figuur 3.4 waarmee twee qubits worden verstrengeld.
- Druk op run en zorg voor 1000 shots.

b) Bekijk de lijst met nullen en enen: Hij staat onder Raw data. Welke Bell-toestand is dit?

Zoals gezegd, de lijst met ruwe dat wordt niet meer geleverd door Quantum-Inspire. Jammer want nu is de correlatie niet meer te zien. Als de lijst zichtbaar was geweest zou kunnen worden vastgesteld dat er alleen paren van 01 en 10 te zien waren geweest. Dit kan wijzen op twee toestanden: de zogenaamde Bell-2 toestand $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **(|01> + |10>)** en de Bell-4 toestand $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **(|01> - |10>)** .

opdracht 5.1

Laat zien dat de productregel ook opgaat voor de andere drie vakken in figuur 4.1.

Experiment 1

B \ A	Kop	Munt	
Kop	11	40	51
Munt	10	39	49
	21	79	100

De productregel luidt:

P(A kop én B kop) = P(A kop) x P(B kop)

Zie boek

P(A munt én B kop) = P(A munt) x P(B kop)

P(A munt én B kop) = 0,40

P(A munt) x P(B kop) = 0,79 * 0,51 = 0,4029

P(A kop én B munt) = P(A kop) x P(B munt)

P(A kop én B munt) = 0,10

P(A kop) x P(B munt) = 0,21 * 0,40 = 0,082

P(A munt én B munt) = P(A munt) x P(B munt)

P(A munt én B munt) = 0,39

P(A munt) x P(B munt) = 0,79 * 0,49 = 0,3871

opdracht 5.1

Bij experiment 1 (de eerste kruistabel) zou de maatstaf van Yule gelijk moeten zijn aan nul.

a) Bereken de maatstaf van Yule bij experiment 1.

b) Bereken de maatstaf van Yule bij experiment 2.

Er moet verschil zijn tussen situaties met Yule +1 en Yule =-1

c) Hoe zou de kruistabel er uit kunnen zien als Yule gelijk is aan + 1?

d) Hoe zou de kruistabel er uit kunnen zien als Yule gelijk is aan - 1?

B \ A	kop	munt	
kop	p	q	p+q
munt	r	s	r+s
	p+r	q+s	1

De maatstaf = $\frac{ps-qr}{\sqrt{(p+r)(q+s)(p+q)(r+s)}}$

a) Exp. 1: $\frac{0,11*0,39-0,40*0,10}{\sqrt{(0,21)}(0,79)(0,51)(0,49)}=\frac{0,029}{\sqrt{(0,04146}}=0,014$

b) Exp. 2: $\frac{0,30*0,40-0,20*0,10}{\sqrt{(0,50)(0,50)(0,40)(0,60)}}=\frac{-0,08}{\sqrt{0,06}}=-0,327$

c) q of r nul

d) p of s nul

a) Die is nul

opdracht 4.4

a) Bereken de maatstaf van Yule bij het experiment links.

b) Bereken de maatstaf van Yule bij het experiment rechts.

b) $\frac{0,125*0,125-0,375*0,375}{\sqrt{(0,5*0,5*0,5*0,5)}}=\frac{-0,125}{0,25}=-0,5$

opdracht 4.5

Voor de drie andere boodschappen moet Alice een andere poort plaatsen.

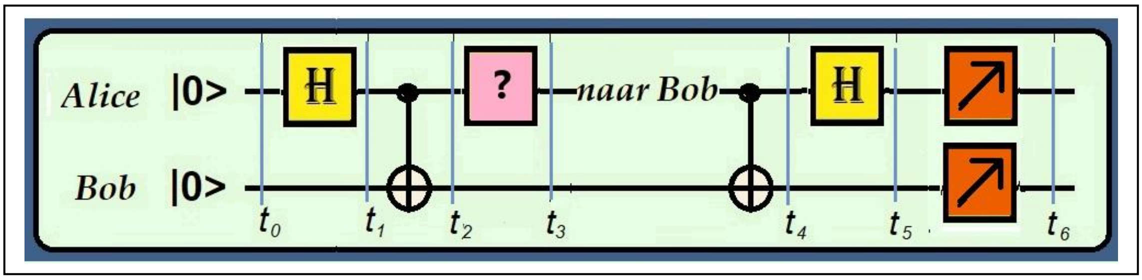
a) Bereken welke boodschap ze overbrengt als ze de $\mathcal{Z}$-poort toepast.

b) Leg uit hoe ze de boodschap **00** zou kunnen overbrengen.

Om de vier verschillende boodschappen **00, 01, 10 of 11** over te brengen maken Alice en Bob gebruik van de Bell-toestanden. Daarvan zijn er ook vier.

c) Welke Bell-toestand is nog niet gebruikt?

d) Leg uit wat Alice moet doen om de laatste bood-



a) Op t_0 is de toestand van de biqubit **|00>.**

Op t_1 is de toestand van de biqubit $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **(|00> + |10>)**

Op t_2 is de toestand van de biqubit $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **(|00> + |11>)**

Op t_3 is de toestand van de biqubit $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **(|00> - |11>)**

Op t_4 is de toestand van de biqubit $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **(|00> - |10>)**

Op t_5 is de toestand van de biqubit

$\frac{1}{2}$ **(|00>+|10> - |00> + |10>) = |10>**

b) Het gaat er om dat we op t_3 de Bell-toestand krijgen die bij toepassing van CNOT en H weer |00> oplevert. Dat is gewoon de toestand $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **(|00> + |11>) .** Die hebben we op t_3 al. Dus we moeten niets doen.

Op t_0 is de toestand van de biqubit **|00>.**

Op t_1 is de toestand van de biqubit $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **(|00> + |10>)**

Op t_2 is de toestand van de biqubit $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **(|00> + |11>)**

Op t_3 is de toestand van de biqubit $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **(|00> + |11>)**

Op t_4 is de toestand van de biqubit $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **(|00> + |10>)**

Op t_5 is de toestand van de biqubit

$\frac{1}{2}$ **(|00>+|10> + |00> - |10>) = |00>**

c) We hebben nu op t_3 de vierde Bell-toestand $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **(|01> - |10>)** nodig. Dat is te realiseren met een X en een Z-poort na elkaar.

Op t_0 is de toestand van de biqubit **|00>.**

Op t_1 is de toestand van de biqubit $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **(|00> + |10>)**

Op t_2 is de toestand van de biqubit $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **(|00> + |11>)**

Op t_3 is de toestand van de biqubit $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **(|01> - |10>)**

Op t_4 is de toestand van de biqubit $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **(|01> - |11>)**

Op t_5 is de toestand van de biqubit

$\frac{1}{2}$ **(|01>+|11> - |01> + |11>) = |11>**

opdracht 4.6

Bob ontvangt van Alice langs een klassiek communicatiekanaal een boodschap met het resultaat van de uitlezing. Bob kan daardoor te weten komen welke bewerking op zijn qubit nog moet worden uitgevoerd. Leg voor elk van de vier mogelijkheden uit welke bewerking nodig is om de qubit van Bob in de toestand |**T**> te krijgen.

Metingen Alice	Bob’s qubit	Noodzakelijke bewerking
00	$\alpha\|0> + \beta\|1>$	E
01	$\alpha\|1> + \beta\|0>$	X
10	$\alpha\|0> - \beta\|1>$	Z
11	$\alpha\|1> - \beta\|0>$	ZX

De toestand van de qubit van Bob is al geod als de boodschap **00** is uitgelezen.
Bij 01 moeten |0> en |1> omgepoold worden . Dat kan met een X-poort
Bij 10 Moet de – in een + worden omgezet. Dat kan met een Z-poort.
Bij 11 zijn de twee vorige bewerkingen allebei nodig. Dus een X- en een Z-poort.

opdracht 5.1

a) Bereken hoeveel 7-tupels van nullen en enen er zijn.

b) Bereken **(0010101)·(1011111)**

c) Bereken **(0010101)·((1011111)⊕(0010101))**

a) Alle tupels van 0000000 tot 1111111 doen mee. 1111111 staat voor het getal $2^6+ 2^5+2^4+2^3+2^2+2^1+2^0 = 2^7-1 = 128-1=127$.
   Dus 128 tupels (nul doet ook mee!)
b) 0*1=0#0*0=0 #1*1=1#0*1=0#1*1=1#0*1=0#1*1=1# dus 0010101
c) 0010101⊕0010101 = 0000000 (als bits gelijk zijn is de bitsgewijze optelling altijd 0.

+

opdracht 5.2
Twee tupels voldoen aan de kenmerken die hierboven genoemd worden. Zoek uit om welke tupels het gaat.

De eisen zijn dus :

- Het is een 7-tupel van nullen en enen.
- Bitsgewijze vermenigvuldiging met zichzelf levert 0 op. De twee mogelijkheden zijn 0*0 en 1*1 . Beide zijn nul. Dit geldt altijd!
- Er zijn minder enen dan nullen. We hebben dus drie, twee, een of geen enen.
- Bij verwisseling van de 2^e en de 6^e bit zijn de nullen en de enen gescheiden.

We nemen de tupel en verwisselen de 2^e en de 6^e bit. Dan zijn de nullen en de enen gescheiden.
We spreken af: 0000000 doet niet mee. Blijven over:
1000000 en 0000001, 1100000 en 0000011, 1110000 en 0000111
Nu verwisselen we weer de 2^e en de 6^e bit . We krijgen
1000000 en 0000001, 1000010 en 0100001 , 1110000 en 0000111
En dat zijn dus meteen alle mogelijkheden. We hebben vraag 5.3 dan ook meteen beantwoord.

opdracht 5.3

a) Laat zien dat de tupel **(1001001)** niet voldoet aan de eisen van opgave 5.2.

b) Laat zien dat de tupel **(1000010)** wel voldoet aan de eisen van opgave 5.2.

opdracht 5.4
Bekijk het circuit van figuur 5.3. Qubit **y** wordt gepre-pareerd in de toestand |**0**>.

a) Neem als invoertupel **1110**. De begintoestand van het register is dus |**111000000**. Doorloop het circuit stap voor stap en laat zien hoe de toestand van het register verandert.

b) Is de eindtoestand gelijk aan de begintoestand?

c) Herhaal het hele procedé voor het tupel **0110**.

a) We bekijken het hele register op t=0 is de toestand |111000000>. Na elke poort neemt teller t met 1 toe en die loopt dus op tot 17. De vijfde qubit vermeldt de uitkomst. Bij de eerste twee stappen wordt x_0 vergeleken met x_1 .

Als die twee ongelijk zijn komt de eerste hulpvariabele op 1 te staan.
Bij de volgende twee stappen wordt x_0 vergeleken met x_2 .
Ook hier geldt dat de hulpvariabele alleen op 1 komt als de beide ongelijk zijn.
Daarna volgen nog de vergelijkingen van x_1 met x_2 en die van x_1 met x_3. Cruciaal is de negende stap. Daar wordt de vijfde qubit 1 als alle hulpvariabelen op 1 staan.
De laatste acht stappen dienen er voor om alle hulpvariabelen weer op nul te zetten.
In de tabel hieronder zijn zowel voor de invoer van 1110 als voor 0110 de toestandsveranderingen in beeld gebracht.

teller	Invoer 1110	teller	Invoer 0110
0	1 1 1 0 0 0 0 0 0	0	1 1 1 0 0 0 0 0 0
1	1 1 1 0 0 1 0 0 0	1	1 1 1 0 0 1 0 0 0
2	1 1 1 0 0 0 0 0 0	2	1 1 1 0 0 1 0 0 0
3	1 1 1 0 0 0 1 0 0	3	1 1 1 0 0 1 1 0 0
4	1 1 1 0 0 0 0 0 0	4	1 1 1 0 0 1 1 0 0
5	1 1 1 0 0 0 0 1 0	5	1 1 1 0 0 1 1 1 0
6	1 1 1 0 0 0 0 1 0	6	1 1 1 0 0 1 1 1 0
7	1 1 1 0 0 0 0 1 1	7	1 1 1 0 0 1 1 1 1
8	1 1 1 0 0 0 0 1 1	8	1 1 1 0 0 1 1 1 1
9	1 1 1 0 0 0 0 1 1	9	1 1 1 0 1 1 1 1 1
10	1 1 1 0 0 0 0 1 1	10	1 1 1 0 1 1 1 1 1
11	1 1 1 0 0 0 0 1 1	11	1 1 1 0 1 0 1 1 1
12	1 1 1 0 0 0 0 1 1	12	1 1 1 0 1 0 1 1 1
13	1 1 1 0 0 0 0 1 1	13	1 1 1 0 1 0 0 1 1
14	1 1 1 0 0 0 0 1 1	14	1 1 1 0 1 0 0 1 1
15	1 1 1 0 0 0 0 0 1	15	1 1 1 0 1 0 0 0 1
16	1 1 1 0 0 0 0 0 1	16	1 1 1 0 1 0 0 0 1
17	1 1 1 0 0 0 0 0 0	17	1 1 1 0 1 0 0 0 0

opdracht 5.5

a) Laat zien hoe de carrus verandert met een begintoestand $|\mathbf{1}>$.

b) Laat zien hoe de carrus verandert met een begintoestand $|+>$.

a) f=0 en y=1 dan is de carrus na het raadplegen van het orakel gelijk aan **|0⊕1>** = |1>
   f=1 en y=1 dan is de carrus na het raadplegen van het orakel gelijk aan **|1⊕1>** = **|0>**
b) f=0 en y=$\frac{1}{\sqrt{2}}$ **(|0>+ |1>)** dan is de carrus na het raadplegen van het orakel gelijk aan $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **(|0⊕0>+ |0⊕1>)** = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **(|0>+ |1>)**
c) f=1 en y=$\frac{1}{\sqrt{2}}$ **(|0>+ |1>)** dan is de carrus na het raadplegen van het orakel gelijk aan $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **(|1⊕0>+ |1⊕1>)** = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **(|0>+ |1>)**
   Dus de carrus verandert niet of f nu gelijk is aan nul of niet!

opdracht 5.6

Aan een amplitudeversterker wordt een triqubit aangeboden in de toestand

$\frac{1}{2\sqrt{2}}(|000> + |001> + ...\textbf{-}|\textbf{101}> + |110> + |111>)$.

a) Bereken de waarde van μ en van $2\mu - a_x$ voor alle acht basisvectoren.

b) Bereken de kans op uitlezing van een **000** vóór en na de amplitudeversterking.

c) Bereken de kans op uitlezing van een **101** vóór en na de amplitudeversterking.

a) $$\mu = \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}}{8} = \frac{6}{8} \quad \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Voor alle coëfficiënten behalve bij |**101>** geldt dat $a_x = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{8}}$;
En na de inversie geldt:

$$2\mu - a = \frac{12}{8} * \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} * \frac{1}{\sqrt{8}}$$

Voor de coëfficiënt van |**101>** geldt dat die voor de inversie gelijk is aan $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$; En daarna wordt dat

$$2\mu - a = \frac{12}{8} * \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{5}{2} * \frac{1}{\sqrt{8}}$$

b) De kans op uitlezing van 000 was eerst 1/8 en daarna 4x zo klein dus 1/32.

c) Voor 101 geldt: eerst 1/8 en daarna 25/32.

opdracht 5.7
Aan een amplitudeversterker met twee ingangen in plaats van vier zoals in figuur 5.7 wordt een biqubit aangeboden in een toestand $\frac{1}{2}$(|**00**>+|**01**>-|**01**>+|**11**>).

a) Teken het circuit.

We hebben dus de volgende poorten: $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{CZ}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_1, \mathcal{H}_2$ en $\mathcal{H}_1$.

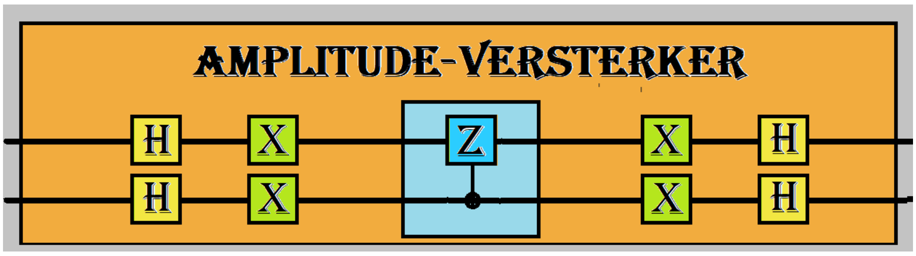
b) Laat zien dat:

$$\mathcal{H}_2\mathcal{H}_1\ \frac{1}{2}\begin{pmatrix}+1\\+1\\-1\\+1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}+1\\-1\\+1\\+1\end{pmatrix}$$

c) Laat zien wat $\mathcal{X}_1\mathcal{X}_2$ met deze toestand doet.

d) Laat zien wat de amplitudeversterker met de begintoestand doet.

a)



b) We onderzoeken wat de dubbele poort $h_2\ h_1$ doet met de vier basistoestanden.

$h_2\ h_1\ |00> = h_2\{\frac{1}{\sqrt{2}}(\ |00> + |10>)\} = \frac{1}{2}(\ |00> + |01> + |10> + |11>)$

$h_2\ h_1\ |01> = h_2\{\frac{1}{\sqrt{2}}(\ |01> + |11>)\} = \frac{1}{2}(\ |00> - |01> + |10> - |11>)$

$h_2\ h_1\ |10> = h_2\{\frac{1}{\sqrt{2}}(\ |00> - |10>)\} = \frac{1}{2}(\ |00> + |01> - |10> - |11>)$

$h_2\ h_1\ |11> = h_2\{\frac{1}{\sqrt{2}}(\ |01> - |11>)\} = \frac{1}{2}(\ |00> - |01> - |10> + |11>)$

Nu wordt de operator $h_2\ h_1$ losgelaten op de toestand van de biqubit:

$h_2\ h_1\ \frac{1}{2}(\ |00> + |01>$ $- |10>$ $+ |11>)$

Toepassing van het lineariteitsbeginsel levert op :

$$\frac{1}{2}*\frac{1}{2}\{\ |00> + |01> + |10> + |11> +$$
$$|00> - |01> + |10> - |11> +$$
$$- |00> - |01> + |10> + |11> +$$
$$|00> - |01> - |10> + |11>\ \}$$

Dus

$$\frac{1}{4}(\ 2\ |00> - 2\ |01> + 2\ |10> + 2\ |11>) =$$
$$\frac{1}{2}(\ |00> - |01> + |10> + |11>)$$

Dus $h_2\ h_1 \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) We kijken eerst naar het algemene geval

$$X_2\ X_1(\alpha\ |00> + \beta\ |01> + \gamma\ |10> + \delta\ |11>) = \alpha\ |11> + \beta\ |10> + \gamma\ |01> + \delta\ |00>$$

Dus $X_2\ X_1\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta \\ \gamma \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$

En dus:

$$X_2\ X_1 \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d) We zijn al een eind onderweg. Bij de volgende stap werkt er een conditionele Z-poort. De tweede qubit werkt als control.

Dus

$$\frac{1}{2}(|00> - |01> + |10> + |11>)$$ wordt

$$\frac{1}{2}(|00> + |01> + |10> - |11>)$$

Vervolgens werkt er weer een combinatiepoort $X_2\ X_1$

$$X_2\ X_1 \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Voor de laatste stap kijken we eerst wat de combinatiepoort $h_2\ h_1$ met de algemene toestand doet.

$$h_2\ h_1 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = ?$$

$h_2\ h_1\{\ \alpha\ |00> +\ \beta\ |01> +\ \gamma\ |10> +\ \delta\ |11>\}$ wordt gelijk aan

$\alpha\ h_2\ h_1\ |00> +\ \beta\ h_2\ h_1\ |01> +\ \gamma\ h_2\ h_1\ |10> +\ \delta\ h_2\ h_1\ |11>)$

=

$$\alpha\ \tfrac{1}{2}(\ |00> + |01> + |10> + |11>)\ +$$
$$\beta\ \tfrac{1}{2}(\ |00> - |01> + |10> - |11>)\ +$$
$$\gamma\ \tfrac{1}{2}(\ |00> + |01> - |10> - |11>)\ +$$
$$\delta\ \tfrac{1}{2}(\ |00> - |01> - |10> + |11>) =$$

$$\tfrac{1}{2}\{\ (\alpha+\beta+\gamma+\delta)\ |00> + (\alpha-\beta+\gamma-\delta)\ |01> + (\alpha+\beta-\gamma-\delta)|10> + (\alpha-\beta-\gamma+\delta)\ |11>\ \}$$

Bij gebruik van de viervectornotatie wordt dit :

$$h_2\ h_1 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \alpha+\beta+\gamma+\delta \\ \alpha-\beta+\gamma-\delta \\ \alpha+\beta-\gamma-\delta \\ \alpha-\beta-\gamma+\delta \end{pmatrix}$$

Vervolgens vullen we in:

$$h_2\ h_1 \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1+1+1+1 \\ -1-1+1-1 \\ -1+1-1-1 \\ -1-1-1+1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Helaas is dit niet waarop we gehoopt hadden.

De amplitudeversterker geeft alle vier de basistoestanden weer dezelfde kans op uitlezing van 25% mee.
De oorzaak ligt hem in het feit dat het gekozen voorbeeld te eenvoudig is.
Als extra voegen we een uitbreiding toe.
Om de werking van de amplitudeversterker te demonstreren vragen we ons af wat de amplitudeversterker doet met het probleem van vraag 5.6 . Het wordt dan onmiddellijk duidelijk dat de complexiteit snel toeneemt bij grotere registers.

De werking van een amplitudoversterker uitgelegd aan de hand van een triqubit

opdracht 5.6
Aan een amplitudeversterker wordt een triqubit aangeboden in de toestand
$\frac{1}{2\sqrt{2}}(|000> + |001> + \ldots - |\mathbf{101}> + |110> + |111>)$.

a) Bereken de waarde van μ en van $2\mu - a_x$ voor alle acht basisvectoren.

b) Bereken de kans op uitlezing van een **000** vóór en na de amplitudeversterking.

c) Bereken de kans op uitlezing van een **101** vóór en na de amplitudeversterking.

d) $$\mu = \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}}{8} = \frac{6}{8} \quad \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

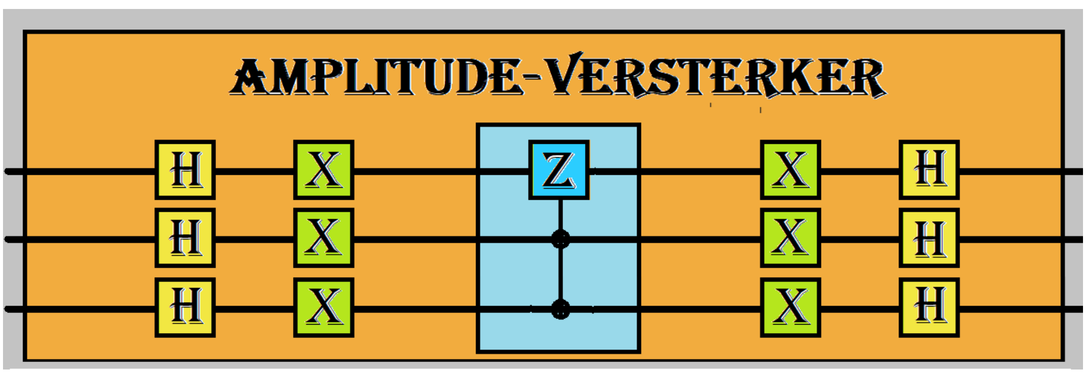
Voor alle coëfficiënten behalve bij |**101>** geldt dat $a_x = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{8}}$;
En na de inversie geldt:

$$2\mu - a = \frac{12}{8} * \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} * \frac{1}{\sqrt{8}}$$

Voor de coëfficiënt van |**101>** geldt dat die voor de inversie gelijk is aan $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$; En daarna wordt dat

$$2\mu - a = \frac{12}{8} * \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{5}{2} * \frac{1}{\sqrt{8}}$$

e) De kans op uitlezing van 000 was eerst 1/8 en daarna 4x zo klein dus 1/32.
f) Voor 101 geldt: eerst 1/8 en daarna 25/32.



We onderzoeken wat de tripoort $(h_3\ h_2\ h_1)$ doet met de acht basistoestanden.

$h_3\ h_2\ h_1$ **|000> =**

$h_3\ h_2\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(|000> + |001>)\} =$

$h_3 \{ \frac{1}{2}(|000> + |001> + |010> + |011>) \} =$

$\frac{1}{2\sqrt{2}}\{ |000>+ |001>+ |010>+ |011>+ |100>+ |101>+ |110>+ |111> \}$

$h_3\ h_2\ h_1$ **|001> =**

$h_3\ h_2\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(|000> - |001>)\} =$

$h_3 \{ \frac{1}{2}(|000> - |001> + |010> - |011>) \} =$

$\frac{1}{2\sqrt{2}}\{ |000>- |001>+ |010>- |011> + |100> - |101> + |110> - |111> \}$

$h_3\ h_2\ h_1$ **|010> =**

$h_3\ h_2\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(|010> + |011>)\} =$

$h_3 \{ \frac{1}{2}(|000> - |011> + |000> - |011>) \} =$

$\frac{1}{2\sqrt{2}}\{ |000>+ |001>- |010>- |011>+ |100>+ |101>- |110>- |111> \}$

$h_3\ h_2\ h_1$ **|011> =**

$h_3\ h_2\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(|000> - |001>)\} =$

$h_3 \{ \frac{1}{2}(|000> - |001> - |010> + |011>) \} =$

$\frac{1}{2\sqrt{2}}\{ |000>- |001>- |010>+ |011>+ |100>- |101>- |110>+ |111> \}$

$h_3\, h_2\, h_1\, |100> =$

$h_3\, h_2\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(|000> + |001>)\} =$

$h_3 \{ \frac{1}{2}(|000> + |001> + |010> + |011>) \} =$

$\frac{1}{2\sqrt{2}}\{ |000>+ |001>+ |010>+ |011>- |100>- |101>- |110>- |111> \}$

$h_3\, h_2\, h_1\, |101> =$

$h_3\, h_2\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(|000> - |001>)\} =$

$h_3 \{ \frac{1}{2}(|000> - |001> + |010> - |011>) \} =$

$\frac{1}{2\sqrt{2}}\{ |000>- |001>+ |010>- |011>- |100>+ |101>- |110>+ |111> \}$

$h_3\, h_2\, h_1\, |110> =$

$h_3\, h_2\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(|000> + |001>)\} =$

$h_3 \{ \frac{1}{2}(|000> + |001> - |010> - |011>) \} =$

$\frac{1}{2\sqrt{2}}\{ |000>+ |001>- |010>- |011>- |100>- |101>+ |110>+ |111> \}$

$h_3\, h_2\, h_1\, |111> =$

$h_3\, h_2\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(|000> - |001>)\} =$

$h_3 \{ \frac{1}{2}(|000> - |001> - |010> + |011>) \} =$

$\frac{1}{2\sqrt{2}}\{$ |000>- |001>- |010>+ |011>- |100>+ |101>+ |110>- |111> }

$\frac{1}{2\sqrt{2}}\{$ |000>+ |001>+ |010>+ |011>+ |100>+ |101>+ |110>+ |111> }

$\frac{1}{2\sqrt{2}}\{$ |000>- |001>+ |010>- |011> + |100> - |101> + |110> - |111> }

$\frac{1}{2\sqrt{2}}\{$ |000>+ |001>- |010>- |011>+ |100>+ |101>- |110>- |111> }

$\frac{1}{2\sqrt{2}}\{$ |000>- |001>- |010>+ |011>+ |100>- |101>- |110>+ |111> }

$\frac{1}{2\sqrt{2}}\{$ |000>+ |001>+ |010>+ |011>- |100>-|101>- |110>- |111> }

$\frac{1}{2\sqrt{2}}\{$ |000>- |001>+ |010>- |011>- |100>+|101>- |110>+ |111> }

$\frac{1}{2\sqrt{2}}\{$ |000>+ |001>- |010>- |011>- |100>- |101>+ |110>+ |111> }

$\frac{1}{2\sqrt{2}}\{$ |000>- |001>- |010>+ |011>- |100>+ |101>+ |110>- |111> }

Met deze uitkomsten kan nu worden nagegaan wat de uitkomst is van de transformatie waarbij $h_3\ h_2\ h_1$ wordt losgelaten op de superpositie

$\frac{1}{2\sqrt{2}}\{$ |000>+ |001>+ |010>+ |011>+ |100> - |101>+ |110>+ |111> }

Door de lineariteit kunnen we het resultaat eenvoudig opschrijven als een som van 64 termen

$\frac{1}{2\sqrt{2}} * \frac{1}{2\sqrt{2}}$ {

|000>+ |001>+ |010>+ |011>+ |100>+ |101>+ |110>+ |111> +

|000>- |001>+ |010>- |011>+ |100>- |101>+ |110>- |111> +

|000>+ |001>- |010>- |011>+ |100>+ |101>- |110>- |111> +

|000>- |001>- |010>+ |011>+ |100>- |101>- |110>+ |111> +

|000>+ |001>+ |010>+ |011>- |100>- |101>- |110>- |111> +

- |000>+ |001>- |010>+ |011>+ |100>- |101>+ |110>- |111> +

|000>+ |001>- |010>- |011>- |100>- |101>+ |110>+ |111> +

|000>- |001>- |010>+ |011>- |100>+ |101>+ |110>- |111>

$\frac{1}{\sqrt{64}}$ **{6|000>+2|001>-2|010>+2|011>+2|100>-2|101>+2|110>-2|111>**

}

Vervolgens passen we de tripoort X_3 X_2 X_1 toe op het resultaat.
Dan wordt de toestand van het register gelijk aan

$\frac{1}{\sqrt{64}}$ **{6|111>+2|110>-2|101>+2|100>+2|001>-2|010>+2|001>-2|000>**

}

En nu wordt de conditionele Z_1 losgelaten op deze toestand. Elke term met twee enen op het eind verandert van teken. Dat is hier alleen de eerste term. Resultaat:

$\frac{1}{\sqrt{64}}$ {- 6|111>+2|110>-2|101>+2|100>+2|001>-2|010>+2|001>-2|000>
}

Vervolgens passen we de tripoort X_3 X_2 X_1 opnieuw toe op het resultaat. Dan wordt de toestand van het register gelijk aan

$\frac{1}{\sqrt{64}}$ {-6|000>+2|001>-2|010>+2|011>+2|100>-2|101>+2|110>-2|111>
}

Tenslotte passen we weer h_3 h_2 h_1 toe.
We krijgen weer 64 termen.

$\frac{1}{\sqrt{64}} * \frac{1}{2\sqrt{2}}$ {

-6 { |000>+ |001>+ |010>+ |011>+ |100>+ |101>+ |110>+ |111>
} +

+2 { |000>- |001>+ |010>- |011>+ |100>- |101>+ |110>- |111>
} +

- 2 { |000>+ |001>- |010>- |011>+ |100>+ |101>- |110>- |111>}
+

+2 { |000>- |001>- |010>+ |011>+ |100>- |101>- |110>+ |111> }
+

+2 { |000>+ |001>+ |010>+ |011>- |100>- |101>- |110>- |111> }
+

- 2 { |000>- |001>+ |010>- |011>- |100>+|101>- |110>+ |111>} +

+2 { |000>+ |001>- |010>- |011>- |100>- |101>+ |110>+ |111> }

+

-2 { |000>- |001>- |010>+ |011>- |100>+ |101>+ |110>- |111>}

$\frac{1}{\sqrt{64}} * \frac{1}{2\sqrt{2}}$ {

-6 |000>-6 |001>-6 |010>-6 |011>-6 |100>-6 |101>-6 |110>-6 |111> +

+2|000>-2 |001>+2 |010>-2 |011>+2 |100>-2 |101>+2 |110>-2 |111>

+

- 2|000>-2 |001>+2 |010>+2 |011>-2 |100>-2 |101>+2 |110>+2 |111>

+

+2|000>-2 |001>-2 |010>+2 |011>+2 |100>-2 |101>-2 |110>+2 |111> +

+2|000>+2 |001>+2 |010>+2 |011>-2 |100>-2 |101>-2 |110>-2 |111> +

- 2|000>+2 |001>-2 |010>+2 |011>+2 |100>-2 |101>+2 |110>-2 |111> +

+2|000>+2 |001>-2 |010>-2 |011>-2 |100>-2 |101>+2 |110>+2 |111> +

-2|000>+2 |001>+2 |010>-2 |011>+2 |100>-2 |101>-2 |110>+2 |111> }

=

$-\frac{4}{\sqrt{64}} * \frac{1}{2\sqrt{2}}$ { |000> + |001> + |010> + |011> + |100> +5 |101> + |110> + |111> }

En inderdaad is de kansamplitude van **|101>** 5x zo groot geworden als die van de andere basistoestanden.

In de taal van de viervectoren kunnen we concluderen:

$$\text{amplitudeversterker } \frac{1}{8}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\-1\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{-1}{\sqrt{32}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\5\\1\\1\end{pmatrix}$$

En we kunnen dus stellen dat deze amplitudeversterker zijn werk doet.

Voor alle kansen op een misgreep geldt $\left(-\frac{1}{\sqrt{32}}\right)^2 = \frac{1}{32}$ en voor de kans op een uitlezing van **101** geldt een kans van $\frac{25}{32}$.