Slim rekenen

rekentrucs ontmanteld

W=kunde+

Jan Los
Wim Berkelmans

Antwoorden

Antwoorden W=kunde+: Slim Rekenen

Blz. 7

Rekenen met je handen

Onderzoek

- a) 12x14=100+60+8=168
- b) 11x13=100+40+3=143

Blz. 8

- c) Rechthoek met daarin een vierkant van 10x10, 4 rechthoeken van 1x10 (de vingers) en een rechthoekje van 1x3
- d) 12x12=100+40+4=144
- e) 11x14=100+50+4=154
- f) 13x14=100+70+12=$17_{1}2$=182
  14x14=100+80+16=$18_{1}6$=196
- g) Nee, want je hebt maar 5 vingers.
- h) Ja, dan wel! Want 11x16=100+70+6=176
  De truc werkt dan dus altijd!

Blz. 9

- a) $(5+b)^2=25+10b+b^2$
- b) $(6a+5)^2=36a^2+60a+25$
- c) $(2c-10)^2=4c^2-40c+100$
- d) $(p-5)(p+5)=p^2-25$

Getallen representeren

- a) 13=10+3
- b) (10+2)(10+3)=100+2x10+3x10+6

Blz. 10

- c) 2a+1
- d) 10a
- e) 10a+3
- f) 10a+25

Onderzoek

- a) 12x12=(10+2)(10+2)=100+2x10+2x10+4=144
- b) 10+a en 10+b
- c) (10+a)(10+b)=100+10a+10b+ab
- d) =100+10(a+b)+ab, eerst 100 dan de som dan het product

Blz. 11

Kwadrateren

a) 25^2=625 (2x3 en dan 25) 55^2=3025 75^2=5625

b) 15^2=225 105^2=11025 $3{,}5^2$=12,25 (eerst zonder komma)

c) zie d), e) en f)

d) 10a+5

e) $(10a+5)^2=100a^2+100a+25$ =a(a+1)x100+25 (a keer één meer dan a, dan twee plaatsen reserveren en daar 25 opschrijven)

Blz. 12

Vermenigvuldigen

Opgave 1	22x28=316	33x37=1231	51x59=3009
Opgave 2	18x12=216	98x92=9016	13x17=221
Opgave 3	340x360=122400	1,4x1,6=2,24	201x209=42009

Onderzoek

a) 10b+a

b) 10b+10-a

c) $(10b+a)(10b+10-a)=100b^2+100b-10ab+10ab+a(10-a)$

d) =100b(b+1)+a(10-a) (b keer één meer dan b dan twee posities vrijhouden en daar het antwoord van a keer 10-a opschrijven)

Blz. 13

Merkwaardig product

a) De rechthoek wordt een vierkant min 1 hokje

b) 22x18=20x20-2x2=396

c) $31x29=30^2-1^2=899$ $42x38=40^2-2^2=1596$ $87x93=90^2-3^2=8091$

d) $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

Opgave 1

a)	396	b)	616	c)	665
d)	9021	e)	8091	f)	9996
g)	6391	h)	5609	i)	20,25
j)	2160				

Blz. 14

Omkering van het eerste merkwaardige product

Opgave 2 $12^2=10x14+2^2=144$

Opgave 3

a) $14^2=10x18+4^2=196$

b) $22^2=20x24+2^2=284$

c) $19^2=20x18+1=361$

d) $103^2=100x106+3^2=10609$

e) $97^2=100x94+3^2=9409$

Opgave 4

a) $1{,}8^2$=(20*16+4)/100=3,24
b) 210^2=(20x22+1)x100=44100
c) 201^2=200x202+1=40401
d) $0{,}31^2$=(30x32+1)/10000=0,0961

Blz. 15

Onderzoek

a) Een kwadraat van een getal dat eindigt op een 5.
b) 35^2=1225 of 35^2=30x40+5^2=1225
c) $(10a+5)^2$=10a(10a+10)+5^2=100a(a+1)+25

Blz. 16

Halveren en verdubbelen

Opgave 1 18x25=9x50=450
Opgave 2 16x75=8x150=4x300=1200
Opgave 3 axb=1/2ax2b
Opgave 4 14x44=28x22=616

Blz. 18

In de buurt van 100

c) 8556
d) 9702

Blz. 19

f)	97x95=9215	98x87=8526	92x95=8740
	90x83=7470	98x98=9604	

Blz. 20

Opgave 1

a)	102x106=10812	108x104=11232	112x103=11536
b)	102x103=10506	115x108=$123_1$120=12420	112x112=12544

c) (100+a)(100+b)=100*100+100a+100b+ab=(100+a+b)x100+ab
d) $150_6$24=15624

Blz. 21

Opgave 2

a) 112x118=13216 (start:112+18=130 daarna 12x18=216. De 2 komt bij de 130)

b) 135x135=18225 (start:135+35=170 daarna 35^2=1225. De 12 komt bij de 170)
c) 88x82=7216

Opgave 3

a) 1013022
b) 1026168
c) 1219918
d) 1237656
e) 121771225 Start met 1103+1104. Dus eerst een 1 met 6 posities erachter. De eerste drie hiervan voor 103+104 =207. We hebben nu al 1207###. De laatste drie posities zijn voor 103*104=10712. Dus we hebben nu 1217712. Als laatste zetten hier 25 achter.

Onderzoek

a) (1000+a)(1000+b)=1000.000+(a+b)1000+ab
b) $(10^k+a)((10^k+b)=10^{2k}+(a+b)10^k+ab$

Blz. 23

Opgave 2

$46^2=2116$
$43^2=1849$
$36^2=1296$
$48^2=2304$
$29^2=841$
$32^2=1024$
$53^2=2809$
$59^2=3481$
$64^2=4096$

Onderzoek….

$100(x-25)+(50-x)^2=100x-2500+2500-100x+x^2=x^2$.

Opgave 3

1)	224	1x2 en dan 24
2)	24960	Eerst zonder 0. Dus 50^2-2^2
3)	11227	Iets meer dan 100 keer iets meer dan 100
4)	1849	Eerst -25 dan het kwadraat van het verschil met 50
5)	90.25	Eerst zonder komma. Dan 9x10 en daarachter 25
6)	38025	19x20 daarachter 25
7)	3021	5x6. Daarachter 3x7
8)	168100	Eerst zonder 0. Dan -25. Daarachter kwadraat van het verschil met 50
9)	8918	Iets minder dan 100 keer iets minder dan 100
10)	9216	$92x100+4^2$

Blz. 24

Deelbaarheid

In het algemeen geldt: als a+b=c en a en b zijn deelbaar door p dan is ook c deelbaar door p.
Het bewijs staat op de volgende blz. bij opgave 1.
Dit kunnen we gebruiken bij de volgende sommen.

2 Als het getal even is dat zie je aan het laatste cijfer. Dat laatste cijfer moet een 0, 2, 4, 6 of 8 zijn.
Als het getal groter is dan 10 is het te schrijven als 10a + b. En (10a + b) : 2 = 5a + b : 2.

3a Nee, 333 is wel deelbaar door 3 en 233 niet

3b Het klopt steeds

3c Stel het getal is 10a+b. Dan (10a+b) : 3 = (9a + a + b) : 3 = (3a + (a + b)) :3. 3a is deelbaar door 3 (met rest 0) dus a+b moet dat dan ook zijn.

4 De laatste twee cijfers zijn deelbaar door 4. Want een getal groter dan 100 is te schrijven als 100a + b en (100a + b) : 4 = 25a + b : 4. Dus als 100a+b deelbaar is door 4 dan moet b deelbaar zijn door 4. Want 100a is al deelbaar door 4

5 Het getal eindigt met een 0 of met een 5. Een getal groter dan 10 is te schrijven als 10a + b. Omdat 10a al deelbaar door 5 is moet ook b deelbaar zijn door 5.

6 Het getal moet deelbaar zijn door 3 (dus de som van de cijfers van dat getal moet deelbaar zijn door 3) en het getal moet even zijn.

8 De laatste 3 cijfers moeten deelbaar zijn door 8. Els getal groter dan 1000 is te schrijven als 1000a + b. Nu is (1000a + b) : 8 = 125a + b : 8

9 De som van de cijfers moet deelbaar zijn door 9.
Bij twee cijfers: het getal kun je representeren door 10a + b. En (10a + b) : 9 = (9a + a + b) : 9 = a + (a + b) : 9

10 Het getal eindigt op een 0

Blz. 25

11b Een getal bestaande uit 3 cijfers is te schrijven als 100a + 10b + c
Nu is (100a + 10b + c) : 11 = (99a + a + 10b + c) : 11 = 9a + (10b + a + c) :11
Het getal 10b + b+c is deelbaar door 11 als het 1e cijfer (=b) gelijk is aan het 2e cijfer (= b + c).

11c 1000a + 100b + 10c + d = 990a + 10a + 99b + b + 10c + d = 990a + 99b + 10 (a+c) + b+d. Dus het 1e + 3e cijfer is gelijk aan het 2e + 4e cijfer.

11d Een getal van 5 cijfers representeer je als 10.000a + 1.000b + 100c + 10d + e
Dat getal kun je herschrijven als 9.999a + a + 990b + 10b + 99c + c + 10d + e = 11(909a+90b+9c) + 10(b+d) + a+c+e waarbij de letters getallen zijn van 0 t/m 9.
Het eerste gedeelte is een 11-voud dus het tweede deel moet ook deelbaar zijn door 11. Dat is zo als b+d = a+c+e.

12 Als een getal deelbaar is door 12 dan is het deelbaar door 3 en door 4. (zie eerdere opgaven hoe je dit snel kan zien)

Opgave 1

a is deelbaar door c dan is a = pc
b is deelbaar door c dan is b = qc
Nu is a+b = pc + qc = (p+q)c deelbaar door c
Hier zijn a, b, c, p en q steeds gehele getallen.

Opgave 2

n	$(3n + 4)^2 – n^2$	
1	48	= 6*8 klopt
2	96	= 12*8 klopt
6	448	= 56*8 klopt

$(3n + 4)^2 – n^2 = 9n^2 + 24n + 16 – n^2 = 8n^2 + 24n + 16 = 8 (n^2 + 3n + 2)$

Blz. 26

Opgave 1

a $c = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

b $c = \sqrt{500} = 10\sqrt{5}$

c $c = \sqrt{245} = 7\sqrt{5}$

Blz. 27

Opgave 2

a $c = 15\sqrt{2}$

b $c = 14\sqrt{5}$

c $c = 3\sqrt{17}$

d $c = 1271\sqrt{2}$

Opgave 3

a Alles eerst keer 2: $c = \frac{1}{2}\sqrt{51}$

b Alles eerst keer 2: $c = \frac{1}{2}\sqrt{26}$

c Alles eerst keer 3, daarna alles :2: $c = \frac{2}{3}\sqrt{13}$

d Alles eerst keer 6: $c = \frac{1}{6}\sqrt{25} = \frac{5}{6}$

e Eerst keer 2 (25 en 20) dan delen door 5 (5 en 4): $c = \frac{5}{2}\sqrt{41}$

Opgave 4

a $b = 6\sqrt{5}$

b $b = \frac{5}{2}\sqrt{3}$

c $b = \frac{1}{4}\sqrt{7}$

d $a = 42\sqrt{3}$

Blz. 28

Opgave 5

a $l = 10\sqrt{3}$

b $l = 4\sqrt{14}$

c $l = 23\sqrt{9} = 23 \cdot 3 = 69$

d $l = \frac{1}{2}\sqrt{54} = \frac{3}{2}\sqrt{6}$

Opgave 6

a Eerst delen door 10: A=1, B=1 en kwadraat van A en B en C is 10^2=100

Dus C^2=98 C= $\sqrt{98} = 7\sqrt{2}$

Dus $c = 70\sqrt{2}$

b Som lengtes bij kubus met ribben 1 is 12. Dus l= 12*27=324

c $l = 17{,}5\sqrt{3}$

Blz. 29

Opgave 1

a 18 x 5 = 9 x 10 = 90

b 40 x 12 = 20 x 24 = 10 x 48 = 480

Opgave 2

a $2\frac{1}{2}$ x 16 = 5 x 8 = 40

b $5\frac{1}{2}$ x 38 = 11 x 19 = 218

c $3\frac{1}{3}$ x 27 = 10 x 9 = 90

Blz. 30

Opgave 3

a $3\frac{1}{2}$ x 7 = (7 x 7) / 2 = 49/2

b $4\frac{1}{3}$ x 9 = (13 x 9) / 3 = 117/3

c $3\frac{1}{4}$ x 17 = (13 x 17)/4 = 221/4

d $2\frac{1}{3} \cdot 3\frac{1}{2}$ = (7 x 7) / 6 = 49/6

e $12\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$ = (37 x 1) / 9 = 37/9

Opgave 4

a $3\frac{1}{2}$: 5 = 7 : 10 = 7/10

b 5 : $2\frac{1}{5}$ = 25 : 11 = 25/11

c $2\frac{1}{2}$: $4\frac{1}{2}$ = 5 : 9 = 5/9

d $7\frac{1}{2}$: $\frac{1}{2}$ = 15 : 1 = 15

e $\frac{2}{3}$: $\frac{1}{6}$ = 4 : 1 = 4

Opgave 5

a $\frac{3}{a} \cdot b = \frac{3b}{a}$

b $\frac{p}{q}$: s = p : qs = p / (qs)

c 5 : $\frac{a}{b}$ = 5b : a = (5b)/a

d $\frac{a}{b}$: $\frac{c}{d}$ = ad : bc = (ad) / (bc)

$= \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$ Delen door $\frac{c}{d}$ is hetzelfde als vermenigvuldigen met $\frac{d}{c}$ (het omgekeerde)

Blz. 31

Onderzoek wijn glazen

		Links		Rechts	
		Wit	Rood	Wit	Rood
a	Eerst	10	0	0	10
	Dan	9	0	1	10
b	Dan	9+1/11	10/11	10/11	9+1/11
c	Rood/wit = 10/100			Wit/rood = 10/100	
d	Eerst	90	0	0	90
	Dan	80	0	10	90
	Dan	81	9	9	81

Nog een keer maar dan “in woorden”:

Stel voor het gemak dat in beide glazen 90 cc wijn aanwezig is. Neem nu 10 cc wijn uit het glas witte wijn en doe dit bij de rode wijn. Na mengen is de verhouding rode tot witte wijn in het glas rode wijn uiteraard 9:1. Neem nu 10 cc wijn uit het glas rode wijn met witte wijn. Ook hierin is de verhouding rood : wit dan 9:1, dus 9 cc rode wijn en 1 cc witte wijn door elkaar. Dus van het mengsel van 90 cc rode en 10 cc witte wijn is nu nog een mengsel van 90 – 9 = 81 cc rode en 10 – 1 = 9 cc witte wijn over. Verhouding rood tot wit is nu 81: 9 = 9:1

Het mengsel van 9 cc rode wijn en 1 cc witte wijn wordt nu weer toegevoegd aan de overgebleven 80 cc witte wijn in het andere glas, waardoor daar een mengsel ontstaat van 81 cc witte wijn en 9 cc rode wijn. Verhouding wit tot rood is nu 81:9= 9:1.

e, f, g

2 glazen met p cc wijn waaruit q cc wijn van het ene glas naar het andere wordt overgegoten en dan weer terug:

Heen:

In het witte glas zit nog p-q witte wijn. Ook te schrijven als $(p-q)*(p+q)/(p+q) = (p^2-q^2)/(p+q)$ witte wijn

In het rode glas zit nu p+q wijn in verhouding p rood tot q wit. Ook te schrijven als: $(p^2+pq)/(p+q)$ rood en $(pq+ q^2)/(p+q)$ wit

Terug:

Haal nu q cc wijn uit het gemengde glas: in dit mengsel zit dan $pq/(p+q)$ rode en $q^2/(p+q)$ witte wijn.

In het gemengde rode wijn glas zit dus nog $(p^2+pq)/(p+q) - pq/(p+q) = p^2/(p+q)$ rode wijn en $(pq+ q^2)/(p+q) - q^2/(p+q) = pq/(p+q)$ witte wijn

Voeg nu de q cc mengsel toe aan de overgebleven witte wijn.

In het gemengde witte wijn glas zit nu $(p^2-q^2)/(p+q) + q^2/(p+q) = p^2/(p+q)$ witte wijn en $pq/(p+q)$ rode wijn.

Dus de vertroebeling is even groot voor elke hoeveelheid wijn in de glazen en elk vingerhoedje dat je van het ene glas in het andere overgooit en weer terug.

Blz. 34

72	70 + 2
Eraf 27	20 + 7

Dan eerst 10 van 70 naar 2 overhevelen:

	60 + 12
	20 + 7 -
Antwoord	40 + 5
Omdraaien:	50 + 4
Som	90 + 9

Nu in het algemeen:

	10a + b	wordt	10(a-1)	+ 10+b	
Omdraaien	10b+a		10b	+ a	
Aftrekken geeft			10(a-1-b)	+ 10+b-a	
Omdraaien geeft			10(10+b-a)	+ a-1-b	
Optellen geeft			10 x 9	+ 9	=99