Meetkunde

Construeren en bewijzen

W=kunde+

Wim Berkelmans

Handleiding voor de docent

faculteit der *exacte* wetenschappen

vrije Universiteit amsterdam

versie 2, druk 1, april 2005

Omslag: Heleen Graave

Inhoud

Inleiding

Het boek Meetkunde, construeren en bewijzen, is een eerste kennismaking met elementaire meetkundige constructies. Na een aantal opgaven met meetkundige constructies, wordt gevraagd de juistheid van deze constructies te bewijzen. Tenslotte volgen er nog enkele stellingen en bewijzen uit de vlakke meetkunde.
Omdat het begrip bewijzen bij leerlingen veelal onbekend zal zijn, wordt dit stapsgewijs geïntroduceerd. Na een voorbeeld volgen opgaven met eenvoudige bewijzen. Als hulpmiddel kunnen leerlingen redeneerschema's maken. Bij complexere bewijzen bestaat de opgave uit het aanvullen van deze bewijzen. Op deze manier leren ze de structuur van een bewijs te doorgronden.

Het boek is bestemd voor leerlingen van de onderbouw van het VO. De leerlingen maken op deze manier kennis met een samenhangend onderdeel van de wiskunde en een aantal wiskundige basistechnieken: construeren met passer en liniaal, abstraheren, exact formuleren, logisch redeneren en bewijzen.

Het boek begint met een aantal problemen. Door eerst een aantal vragen te stellen wordt de nieuwsgierigheid geprikkeld. Daarnaast geeft het een beeld van de wiskundige praktijk: je vraagt je dingen af of je wilt een probleem oplossen en vervolgens ontwikkel je ideeën en theorieën die tot het antwoord kunnen leiden.

Het hoofdstuk *Enkele problemen* bevat een vijftal uiteenlopende problemen die allemaal met een aantal meetkundige technieken kunnen worden opgelost. Deze technieken komen in de daaropvolgende hoofdstukken aan de orde, zodat aan het eind van het boek deze problemen allemaal kunnen worden opgelost.

Het hoofdstuk *Definities* is bedoeld als naslag. Bij de opgaven kan hiervan gebruik worden gemaakt.

Op de volgende pagina's staan aanwijzingen en antwoorden van de opgaven.

Enkele problemen

Probleem 1 kan al direct worden aangepakt.
De *problemen 2 en 4* kunnen met enkele stellingen in het hoofdstuk Driehoeken worden opgelost; zie pagina 30.
Probleem 3 los je op met behulp van *Constructie 4* op bladzijde 20.
Het bewijs van de *Stelling van Thales* in *Probleem 5* vindt je als afsluiting van het boek op bladzijde 32.

Probleem 1
Stel je hebt een piramide met een vierkant grondoppervlak en de top precies midden boven dit vierkant. Beschrijf een manier om met behulp van schaduwen de hoogte van deze piramide te meten.
Je kunt de volgende eigenschap van schaduwen gebruiken. Als twee voorwerpen een schaduw werpen dan is de verhouding van de lengtes van de schaduwen gelijk aan de verhouding van de hoogtes van de voorwerpen.
Voorbeeld:
Ik ben 1,80 meter lang en sta naast een vlaggenmast. Mijn schaduw is 2 meter en de schaduw van de vlaggenmast is 4 meter.
De hoogte van de vlaggenmast is dan $4/2 \times 1,8 = 3,6$ meter.

Opgave 1
Schrijf hieronder de door jou bedachte oplossing van *probleem 1*.

Oplossing probleem 1

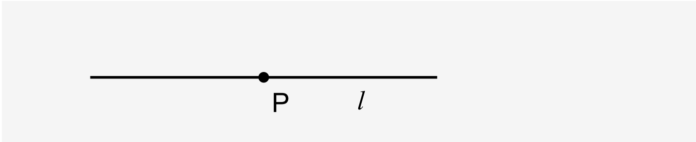
Meet de schaduw van de piramide als de zon precies loodrecht op een zijvlak van de piramide staat. Meet de lengte van de schaduw (de afstand van de schaduw van het toppunt tot aan de rand van de piramide) en tel daarbij de helft van de lengte van de zijde van het grondvlak. Vergelijk dit met de lengte van je eigen schaduw.

Punt, lijn, driehoek en cirkel

Gebruik bij het tekenen in deze opgaven potlood, liniaal en passer.

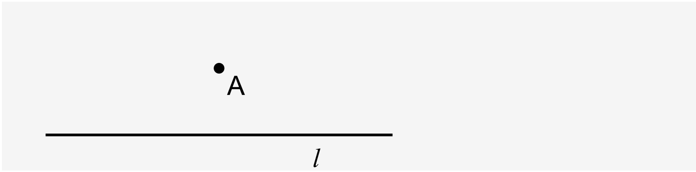
Opgave 2

Teken een lijn en een punt op deze lijn. Geef de lijn en het punt elk een naam.



Opgave 3

Teken een lijn en een punt buiten deze lijn. Noem de lijn *l* en het punt A.

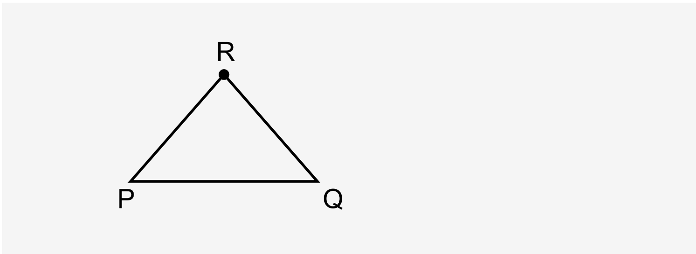


Opgave 4

Teken een lijnstuk PQ.

Teken een punt R zodat de punten P, Q en R niet op één lijn liggen.

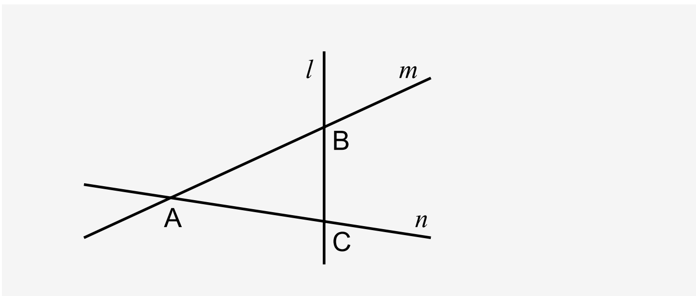
Teken driehoek PQR.



Opgave 5

Teken drie lijnen die niet evenwijdig zijn. Geef de lijnen en de snijpunten van de lijnen namen.

Hoeveel snijpunten heb je? 3



Opgave 6

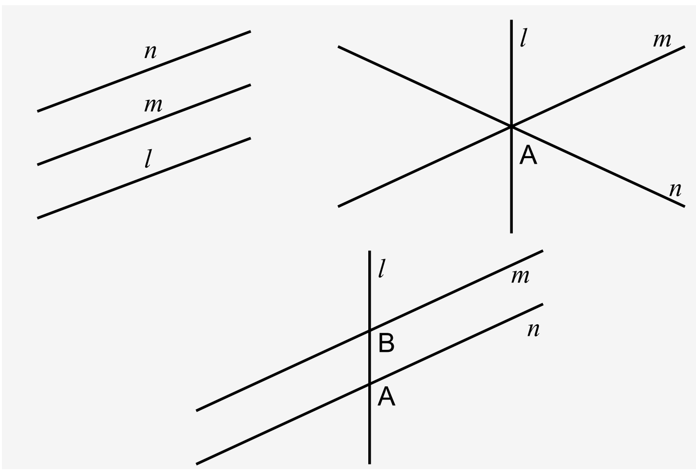
Teken drie lijnen zó, dat er geen snijpunten zijn.

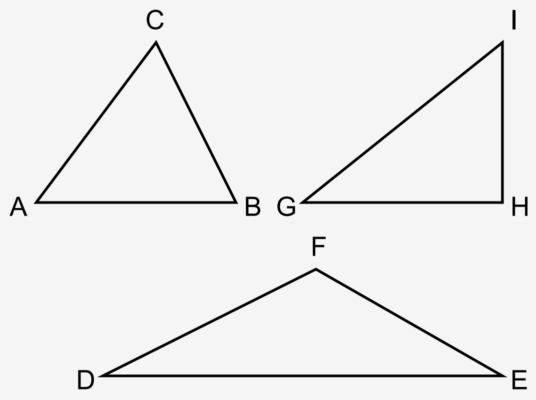
Wat kun je dan zeggen over de lijnen?

De lijnen zijn evenwijdig

Teken drie lijnen zó, dat je één snijpunt krijgt.

Teken ook drie lijnen zó, dat je twee snijpunten krijgt.



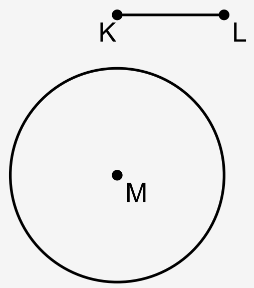


Opgave 7

Teken Δ ABC met drie scherpe hoeken.

Teken Δ DEF met ∠ D en ∠ E scherp en ∠ F stomp.

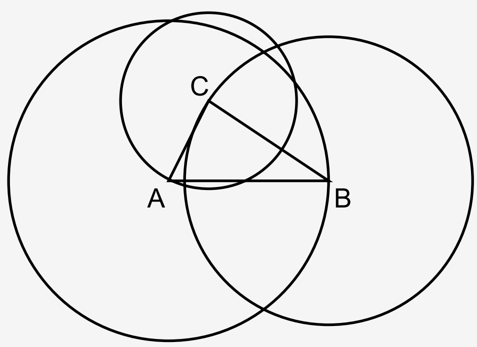
Teken Δ GHI met ∠ G scherp, ∠ H recht en ∠ I scherp.



Opgave 8

Teken een punt M en een lijnstuk KL.

Teken de cirkel met middelpunt M en een straal gelijk aan de lengte van het lijnstuk KL.



Opgave 9

Teken een driehoek ABC.

Teken de cirkel met middelpunt A en straal AB.

Teken de cirkel met middelpunt B en straal BC.

Teken de cirkel met middelpunt C en straal AC.

Opgave 10

Teken een cirkel. Noem het middelpunt M. Kies een willekeurig punt op de cirkel. Noem dit punt A.

Teken binnen de cirkel een cirkelboog met middelpunt A en straal MA.

Deze cirkelboog snijdt de cirkel in twee punten; noem deze punten B en C.

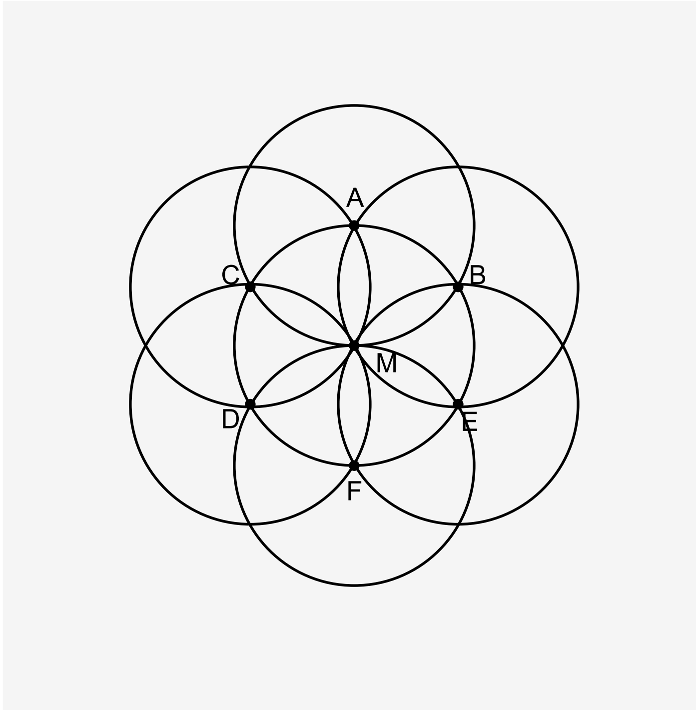
Teken nu een cirkelboog met middelpunt B en straal MB.

Doe dit ook met middelpunt C en straal MC.

Nu krijg je weer twee snijpunten met de cirkel.

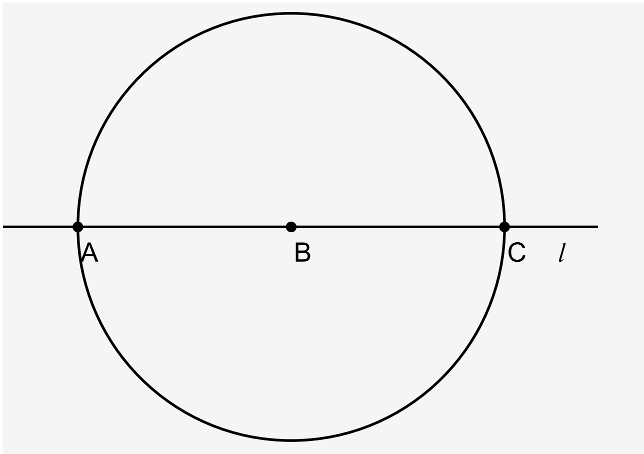
Herhaal dit proces totdat je uiteindelijk zes punten op de cirkel hebt.

Als het goed is, is het resultaat een bloemvorm binnen een cirkel. Kleur de bloem.

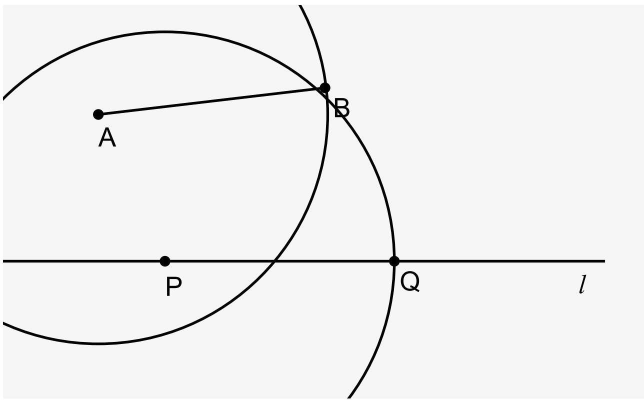


Construeren en bewijzen

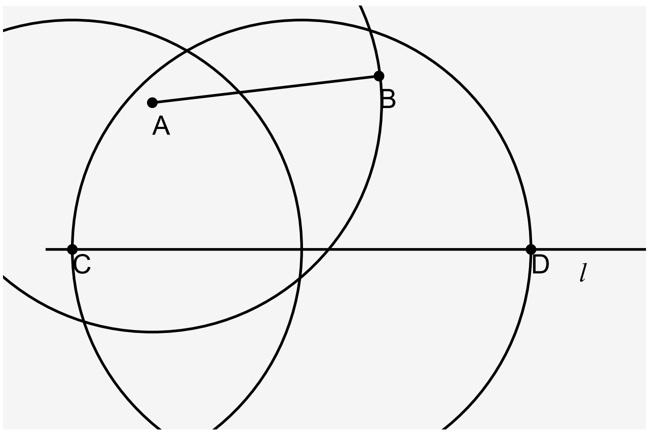
Voor het construeren (tekenen) van meetkundige figuren gebruik je een potlood, een liniaal (zonder schaalverdeling) en een passer.
Met de liniaal teken je rechte lijnen en met de passer cirkels.
Als de liniaal een schaalverdeling heeft, mag je die niet gebruiken om dingen te meten..



Constructie 1
Trek een cirkel met middelpunt B en straal AB.



Constructie 2
Trek een cirkel met middelpunt P en straal AB. De straal AB kun je met de passer vaststellen door de passerbenen op A en B te zetten.



Constructie 3
Kies een willekeurig punt op lijn *l* en noem dit C. Trek eerst een cirkel met middelpunt C en straal AB. Deze cirkel snijdt de lijn *l* in een punt. Trek nu nog een cirkel met dit punt als middelpunt. Deze cirkel snijdt de lijn in twee punten: C en D.

Bewijs constructie 2

Gegeven: lijnstuk AB, lijn *l,* punt P op *l* en ⊙ (P,AB), die lijn *l* in Q snijdt.

Te bewijzen: PQ = AB

Bewijs:

Q ligt op ⊙ (P,AB), dus PQ = straal van deze cirkel = AB.

Bewijs constructie 3

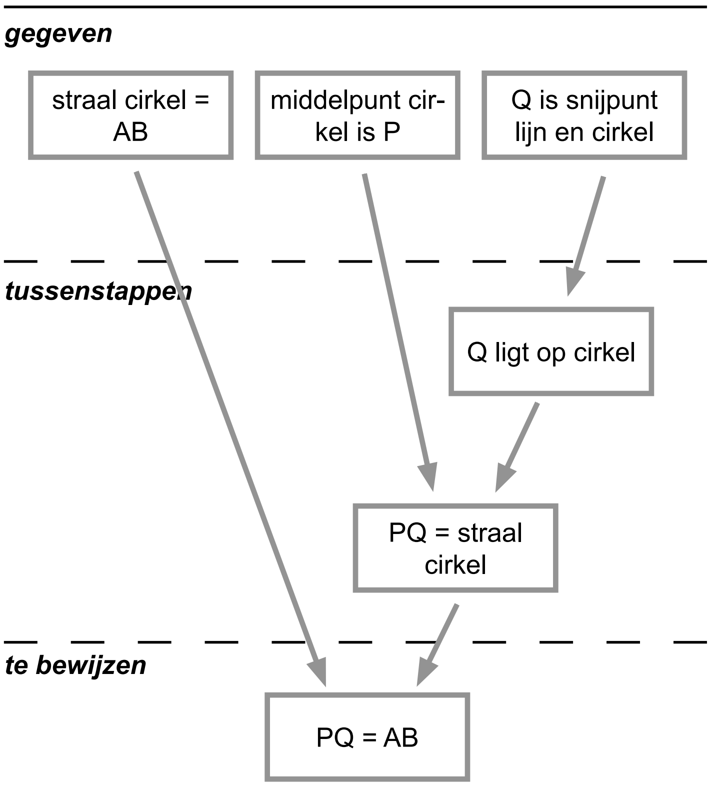
Gegeven: lijnstuk AB, lijn *l*, punt C op *l,* ⊙ (C,AB), die lijn *l* in E snijdt, en ⊙ (E,AB), die lijn *l* in D snijdt.

Te bewijzen: CD = 2 × AB.

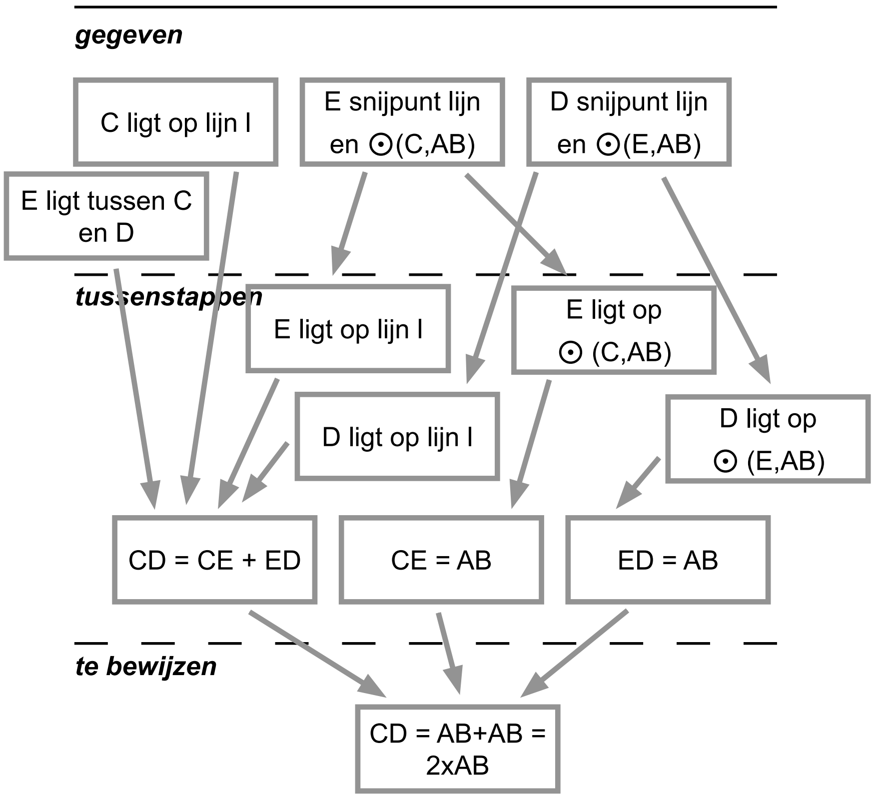
Bewijs:

CE = AB en ED = AB en CD = CE + ED, dus CD = AB + AB = 2 × AB.

redeneerschema bewijs constructie 2



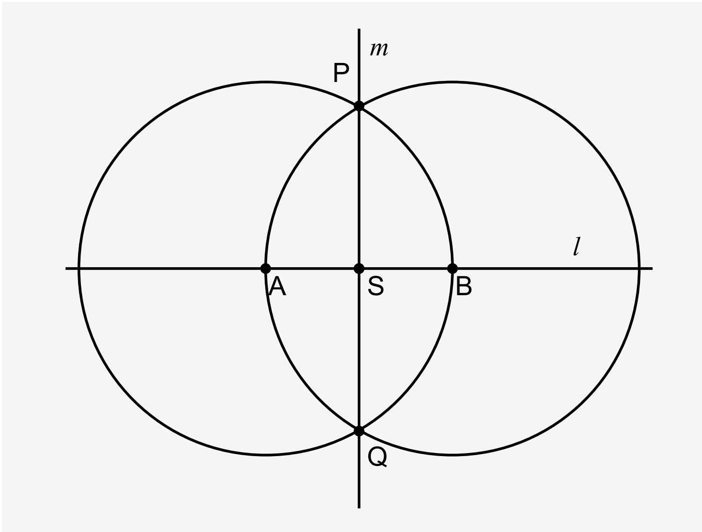
redeneerschema bewijs constructie 3



Constructie 4

Gegeven: een lijn *l* en de punten A en B op *l*.
Construeer een cirkel met middelpunt A en straal AB.
Construeer een cirkel met middelpunt B en straal AB.
Deze twee cirkels snijden elkaar in twee punten. Noem deze punten P en Q.
Teken de lijn *m* door P en Q.
Noem het snijpunt van *l* en *m* S.

Vanwege de eigenschappen van de geconstrueerde lijn *m* noemen we deze lijn de *middelloodlijn* van het lijnstuk AB.



Bewijs constructie 4.1

Gegeven: De punten A en B op lijn *l,* ⊙ (A,AB), ⊙ (B,AB). De cirkels snijden elkaar in P en Q.
Lijn *m* door P en Q snijdt *l* in S.

Te bewijzen: PA = PB en QA = QB.

Bewijs:

P ligt op ⊙ (A,AB), dus AP = AB.

P ligt op ⊙ (B,AB), dus BP = AB.

Dus PA = AB = PB.

Zo is ook QA = QB.

In *constructie 4* kun je zelfs bewijzen dat alle punten op de lijn m even ver van A en B af liggen.
Dit doe je door gebruik te maken van congruente driehoeken, maar dit behandelen we hier niet. Daarom zullen we hier het bewijs niet leveren, maar je mag in het vervolg wel gebruik maken van dit resultaat.

Met behulp van deze bewering over lijn *m* kun je bewijzen dat in *constructie 4* het punt S precies tussen A en B ligt.

Bewijs constructie 4.2

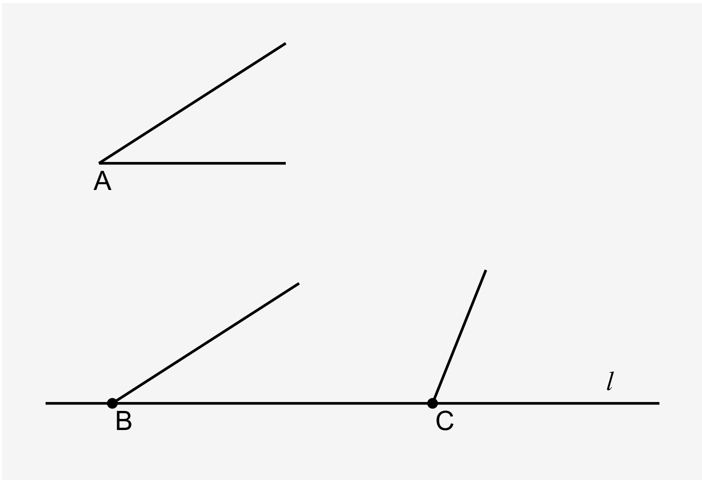
Gegeven: De punten A en B op lijn *l,* ⊙ (A,AB), ⊙ (B,AB). De cirkels snijden elkaar in P en Q.
Lijn *m* door P en Q snijdt *l* in S.

Te bewijzen: AS = SB.

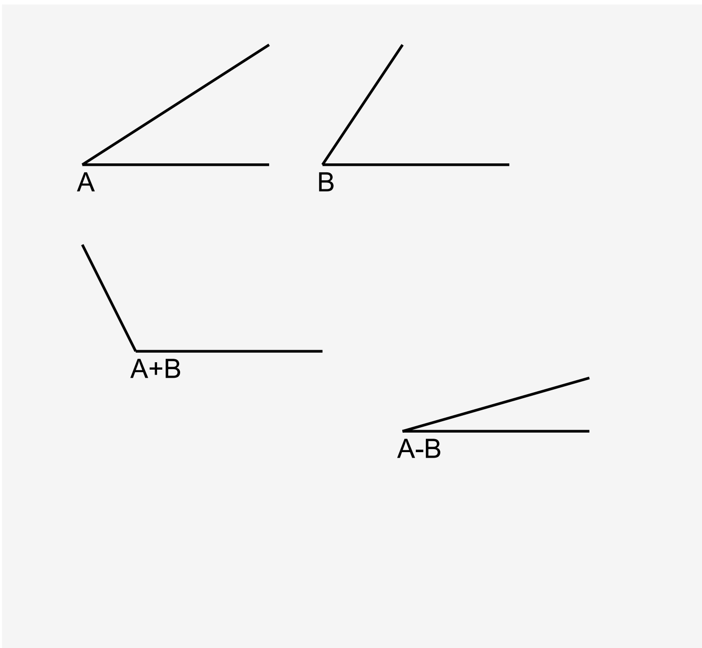
Bewijs:
Volgens bovenstaande bewering liggen alle punten van *m* even ver van A als B af.
Punt S ligt op *m*, dus ligt S even ver van A als B af.
Dus AS = SB.

Lijnen en hoeken

Opgave 12
Meet ∠ A met de geodriehoek.
Teken bij punt B dezelfde hoek met de geodriehoek.
Bereken het dubbele van de grootte van ∠ A en teken een hoek van deze grootte bij punt C.



Opgave 13
Meet de hoeken A en B met de geodriehoek.
Tel de twee groottes bij elkaar op en teken een hoek van deze grootte.
Trek de twee groottes van elkaar af en teken een hoek van deze grootte.



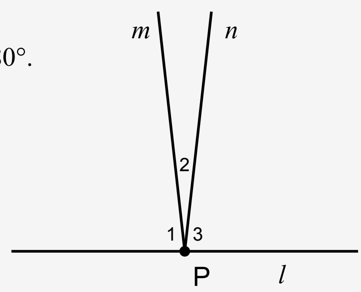
Stelling 1
Door een punt P op een lijn *l* gaat slechts één lijn loodrecht op *l*.

Opgave 14
Bewijs *stelling 1*.

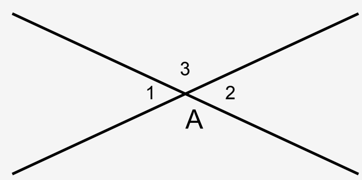
Gegeven: een lijn *l* en een punt P op *l.*

Te bewijzen: er is precies één lijn door P loodrecht op *l*.

Bewijs:
Veronderstel eens dat er twee lijnen *m* en n door punt P gaan, die allebei loodrecht op lijn *l* staan.
Dan krijg je boven lijn *l* drie hoeken: $\angle P_1$, $\angle P_2$ en $\angle P_3$.
Lijn *m* staat loodrecht op *l*, dus $\angle P_1 = 90°$.
Lijn *n* staat loodrecht op *l*, dus $\angle P_3 = 90°$.
$\angle P_1$, $\angle P_2$ en $\angle P_3$ vormen samen een gestrekte hoek, dus $\angle P_1 + \angle P_2 + \angle P_3 = 180°$.
Vervang nu $\angle P_1$ en $\angle P_3$ in deze formule door 90°.
Dan $90° + \angle P_2 + 90° = 180°$. Dus $\angle P_2 = 0°$. Dus lijn *m* en *n* vallen samen.
Dus er gaat maar één lijn door P loodrecht op *l.*



Stelling 2
Twee overstaande hoeken zijn gelijk. Dus $\angle A_1 = \angle A_2$.

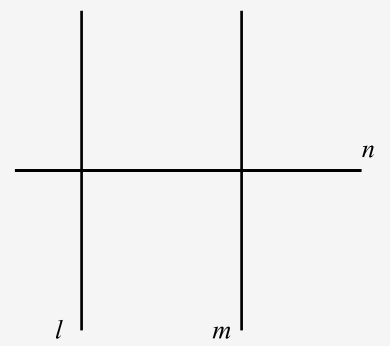


Opgave 15
Bewijs *stelling 2*.

Gegeven: Twee lijnen snijden elkaar in punt A. Twee overstaande hoeken heten $\angle A_1$ en $\angle A_2$.

Te bewijzen: $\angle A_1 = \angle A_2$.

Bewijs:
Noem een derde hoek $\angle A_3$.
Dan is $\angle A_1 + \angle A_3 = 180°$ en $\angle A_2 + \angle A_3 = 180°$.
Dus is $\angle A_1 = \angle A_2$.



Opgave 16

Bewijs het gevolg hiervan: twee lijnen, die allebei loodrecht op een derde lijn staan, zijn evenwijdig.

Gegeven: Twee lijnen *l* en *m* staan beide loodrecht op een derde lijn *n*.

Te bewijzen: Lijn *l* is evenwijdig aan lijn *m*.

Bewijs:
Lijn *l* en *m* staan allebei loodrecht op *n*, dus ze snijden de lijn *n* onder gelijke overeenkomstige hoeken, namelijk hoeken van 90°.
Volgens *stelling 3* is daarom lijn *l* evenwijdig aan lijn *m*.

Driehoeken

Stelling 4

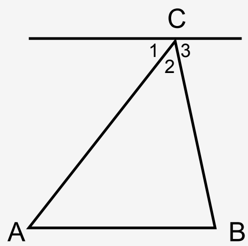
De drie hoeken van een driehoek zijn samen 180°.

Opgave 17

Bewijs *stelling 4*.

Gegeven: Δ ABC.

Te bewijzen: ∠ A + ∠ B + ∠ C = 180°.



Bewijs:
Teken als hulplijn een lijn door C evenwijdig aan AB.
Dan krijg je drie hoeken ∠ C_1 , ∠ C_2 en ∠ C_3 .
Bedenk dat volgens het axioma slechts één lijn door C evenwijdig aan AB loopt.
Bedenk ook dat daarom het omgekeerde van *stelling 3* geldt: ∠ C_1 = ∠ A.
En zo is ook ∠ C_3 = ∠ B.
Verder is ∠ C_1 + ∠ C_2 + ∠ C_3 = 180°.
Dus ∠ A + ∠ C + ∠ B = 180°.
NB: het omgekeerde van *stelling 3* kan ook als extra opgave worden gegeven.

Opgave 18

Bewijs dat slechts één van de hoeken van een driehoek recht of stomp kan zijn. De beide andere hoeken zijn dan scherp.

Gegeven: Δ ABC.

Te bewijzen: Als ∠ A recht of stomp is dan zijn de andere twee hoeken scherp.

Bewijs:
Stel ∠ A is recht, dus ∠ A = 90°.
Omdat ∠ A + ∠ B + ∠ C = 180°, is dan ∠ B + ∠ C = 90°.
Dus ∠ B en ∠ C zijn allebei kleiner dan 90°. Dan zijn dus ∠ B en ∠ C scherp.
Deze redenering geldt ook als ∠ A stomp, dus groter dan 90°, is.

Opgave 19

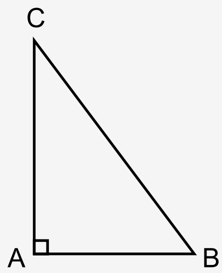
Bewijs dat de twee scherpe hoeken van een rechthoekige driehoek samen 90° zijn.

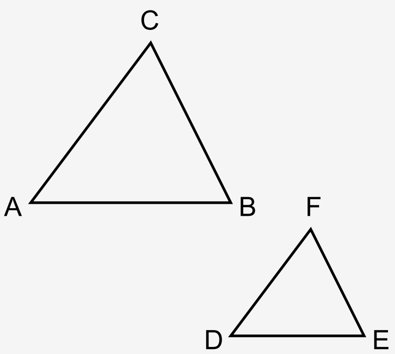
Gegeven: Δ ABC met ∠ A = 90°

Te bewijzen: ∠ B + ∠ C = 90°

Bewijs:
Volgens *stelling 4* is ∠ A + ∠ B + ∠ C = 180°
∠ A = 90°.
Dus is ∠ B + ∠ C = 90°.

NB: Deze opgave moet eigenlijk voor *opgave 18* staan.





Opgave 20

Stel je hebt twee driehoeken, Δ ABC en Δ DEF,
waarbij ∠ A = ∠ D en ∠ B = ∠ E.
Bewijs dat ∠ C = ∠ F.

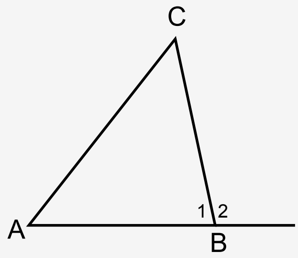
Gegeven: Δ ABC en Δ DEF. ∠ A = ∠ D en ∠ B = ∠ E.

Te bewijzen: ∠ C = ∠ F.

Bewijs:
∠ A + ∠ B + ∠ C = 180° en ∠ D + ∠ E + ∠ F = 180°.
Dus ∠ A + ∠ B + ∠ C = ∠ D + ∠ E + ∠ F.
Omdat ∠ A = ∠ D en ∠ B = ∠ E is dus ∠ D + ∠ E + ∠ C = ∠ D + ∠ E + ∠ F.
Dus ∠ C = ∠ F.

Opgave 21

Wanneer je een zijde van een driehoek aan één kant verlengt, krijg je aan de buitenkant van de driehoek bij dat hoekpunt een tweede hoek. Deze hoek noemen we een *buitenhoek*.
Bij de driehoek hiernaast is $\angle B_2$ een buitenhoek.
$\angle B_1$ wordt dan ook wel *binnenhoek* genoemd.
Bewijs dat $\angle B_2 = \angle A + \angle C$.



Gegeven: Δ ABC, met buitenhoek $\angle B_2$

Te bewijzen: $\angle B_2 = \angle A + \angle C$

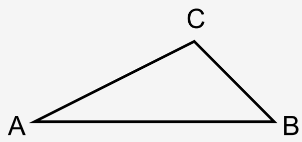
Bewijs:
$\angle B_1$ en $\angle B_2$ vormen samen een rechte lijn, dus $\angle B_1 + \angle B_2 = 180°$.
Volgens *stelling 4* is $\angle B_1 + \angle A + \angle C = 180°$.
Dus $\angle B_2 = \angle A + \angle C$.

Stelling 7

Als in een driehoek twee hoeken ongelijk zijn, dan ligt tegenover de grootste hoek ook de grootste zijde.

Bewijs stelling 7

Gegeven: Δ ABC met ∠ C > ∠ A.



Te bewijzen: AB > BC.

Bewijs:
Er zijn drie mogelijkheden:

1. AB = BC , maar dan is, volgens *stelling 5*, ∠ C = ∠ A. Maar ∠ C > ∠ A, dus dat kan niet.
2. AB < BC , maar dan is, volgens *stelling 6*, ∠ C < ∠ A. Maar ∠ C > ∠ A, dus dat kan ook niet.
3. AB > BC. Dit is de enige mogelijkheid die overblijft.

Opgave 22

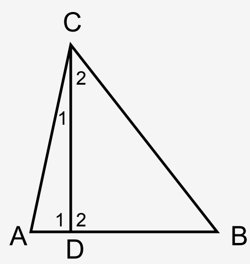
Maak het bewijs van stelling 7 af.

Stelling 8

In een driehoek is één zijde altijd kleiner dan de som van de beide andere.

Bewijs stelling 8

Gegeven: Δ ABC.



Te bewijzen: AB < AC + BC.

Bewijs:
Trek een lijn vanuit C loodrecht op AB. Deze snijdt AB in D tussen A en B.

NB: We gaan ervan uit dat ∠ A en ∠ B scherp zijn; dit mag, want er zijn altijd twee scherpe hoeken.

De lijn staat loodrecht op AB, dus zijn ∠ D_1 en ∠ D_2 recht.

Dan is, volgens *opgave 18*, in Δ ACD ∠ C_1 scherp en dus ∠ D_1 > ∠ C_1.

Dus is in Δ ACD, volgens stelling 7, AC > AD.

In Δ BCD is ,volgens *opgave 18*, ∠ C_2 < ∠ D_2. Dus is, volgens stelling 7, BD < BC.

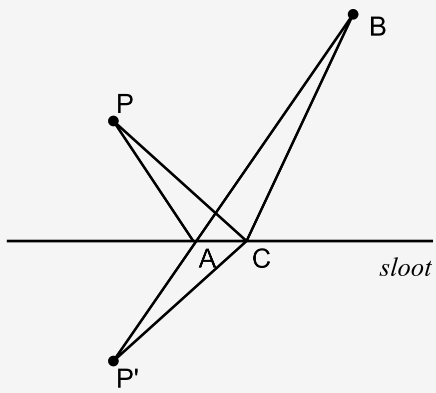
Dus AD + BD < AC + BC.

Dus AB < AC + BC.

Opgave 23

Maak het bewijs van stelling 7 af.

Oplossing *probleem 2*



Spiegel de positie van het paard met de sloot als spiegelas.
Noem het spiegelbeeld van P P'.
Trek de lijn BP'. deze snijdt de sloot in A.
De boer moet dan via A lopen, want:
Neem een willekeurig ander punt C op de lijn van de sloot.
We bewijzen dan dat $PA + AB < PC + CB$.

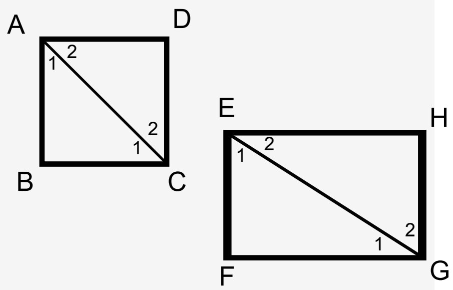
Bewijs:
In Δ P'CB is, volgens *stelling 8*, $P'B < P'C + CB$.
Dus $P'A + AB < P'C + CB$.
$P'A = PA$, want P' is het spiegelbeeld van P.
Zo is ook $P'C = PC$.
Dus $PA + AB < PC + CB$ voor elk punt $C \neq A$.

Dus is het pad via punt A de kortste weg.

Opgave 24

Maak het bewijs af.

Bewijs *probleem 4*



Gegeven: Een vierkant ABCD en een rechthoek EFGH, met $EF \neq FG$.

Te bewijzen: $\angle A_1 = \angle A_2$ en $\angle E_1 \neq \angle E_2$.

Bewijs:
Omdat $AD = DC$, is Δ ACD gelijkbenig en is dus $\angle A_2 = \angle C_2$.
De drie hoeken van Δ ADC zijn samen 180° en $\angle D = 90°$, dus $\angle A_2 + \angle C_2 = 90°$.
Daarom zijn $\angle A_2$ en $\angle C_2$ beide 45°.
Dit geldt ook in Δ ABC voor $\angle A_1$ en $\angle A_2$, dus $\angle A_1 = \angle A_2$.

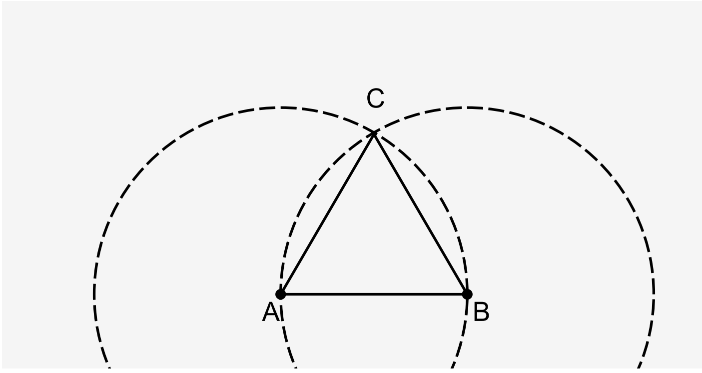
Bij de rechthoek EFGH:
Als $\angle E_1$ gelijk aan $\angle E_2$ zou zijn, dan zouden ze beide 45° zijn, want $\angle E_1 + \angle E_2 = 90°$.
En zo zouden dan $\angle G_1$ en $\angle G_2$ ook 45° zijn.
Maar dan is $\angle E_1 = \angle G_1$ en is in Δ EFG, volgens het omgekeerde van *stelling 5*, $EF = FG$.
Maar gegeven is dat $EF \neq FG$.
Dit is een tegenspraak, dus is $\angle E_1 \neq \angle E_2$.

Opgave 25

Maak het bewijs af.

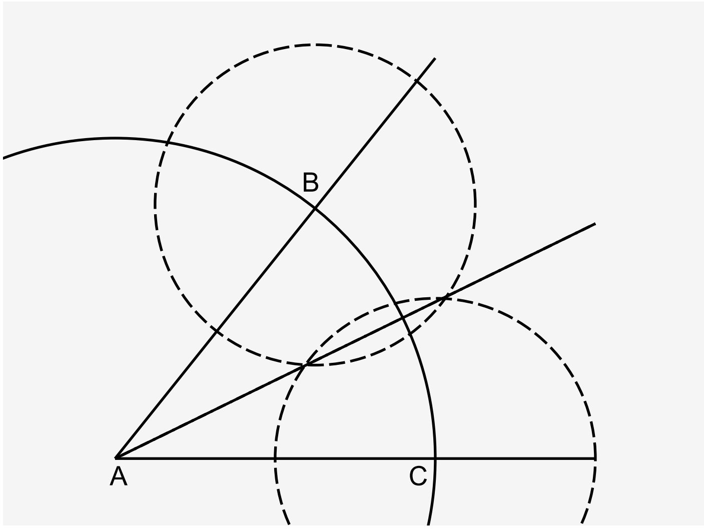
Constructie 5

Trek ⊙ (A,AB) en ⊙ (B,AB). Kies voor C één van de twee snijpunten van de twee cirkels.



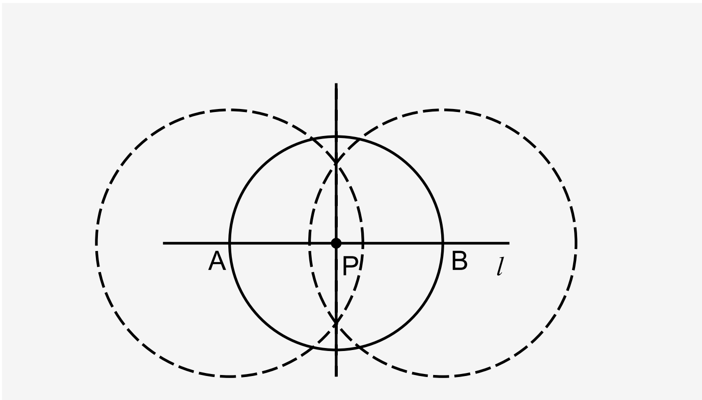
Constructie 6

Trek een cirkel met middelpunt A.
deze cirkel snijdt de beide benen van ∠ A in B en C. Trek twee cirkels met gelijke straal en als middelpunt B resp. C. De snijpunten van deze cirkels liggen even ver van B als van C. De lijn door deze snijpunten is de gezochte lijn.



Constructie 7

Trek een cirkel met middelpunt P. Deze snijdt lijn *l* in A en B. Trek twee cirkels met dezelfde straal met middelpunt A resp. B.
De lijn door de twee snijpunten van deze twee cirkels is de loodlijn door P.



Constructie 8

Construeer eerst en lijn door P loodrecht op *l* en dan een lijn door P loodrecht op deze nieuwe lijn.
De eerste lijn krijg je door een cirkel met middelpunt P te snijden met *l*.
Trek dan met deze twee snijpunten als middelpunt weer twee cirkels en verbindt één van de twee snijpunten van de twee cirkels met P.
Construeer vervolgens de tweede lijn zoals in *constructie 7*.