Eureka !

Van probleem naar oplossing

W=kunde+

Wim Berkelmans

Handleiding voor de docent

faculteit der *exacte* wetenschappen

vrije Universiteit *amsterdam*

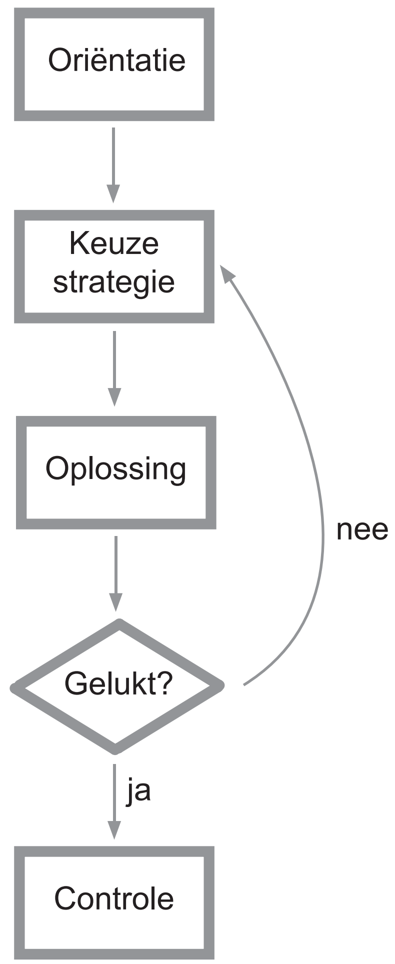
versie 1, november 2005

Inhoud

Inleiding

Eureka! biedt de leerlingen de mogelijkheid om kennis te maken met verschillende oplossingsstrategieën voor wiskundige problemen.
De verschillende strategieën zijn gegroepeerd in zes soorten. Per strategie wordt een voorbeeld gegeven en vervolgens een aantal opgaven. Deze opgaven kunnen met de zojuist behandelde strategie worden opgelost. Omdat de zes strategieën een oplopende moeilijkheidsgraad hebben, is het verstandig om de aangegeven volgorde aan te houden.
Het is echter niet nodig alle opgaven van een strategie te behandelen alvorens door te gaan met de volgende strategie.
Achterin staat een verzameling problemen, waarbij één of meer strategieën kunnen worden toegepast.
In het eerste gedeelte van dit laatste hoofdstuk staat per probleem een advies met betrekking tot de te volgen strategie. Bij het laatste gedeelte staat dit advies er niet bij.

Probeer telkens de structuur van de aanpak, zoals hieronder aangegeven, te volgen.



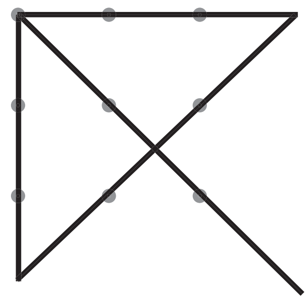
Probleem 1

Probeer eerst eens 20 pakjes van 4 en 12 pakjes van 6 batterijen. Dat zijn 80+72=152 batterijen. Je moet kennelijk meer pakjes van 6 batterijen nemen. Uiteindelijk kom je op 13 pakjes van 4 en 19 pakjes van 6 batterijen.

13 pakjes van vier batterijen

Probleem 2

Probeer eerst wat. Al snel blijkt dat het niet lukt, tenzij je buiten het gebied van de negen punten gaat tekenen.



Probleem 3

Probeer enkele priemgetallen tussen 20 en 30.

29

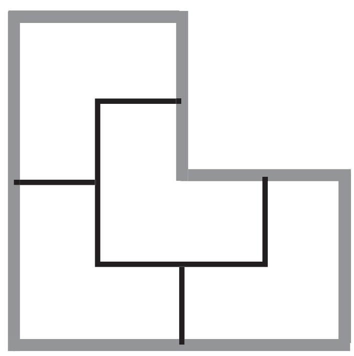
Probleem 4

Kijk naar de priemgetallen kleiner dan 30 en zoek naar een gat van 5 getallen.

24 - 25 - 26 - 27 - 28

Probleem 5

Probeer eerst wat. Bekijk de oppervlakte en bereken hoe groot de oppervlakte van een kwart dan moet worden.



Probleem 6

Bekijk de veelvouden van 12 beginnend bij 24.

48

Probleem 7

Probeer eerst wat, bijvoorbeeld de getallen vanaf 15. De som blijkt te laag uit te komen. Verhoog dan het begingetal met bijvoorbeeld 10. Het kan ook met een formule, door naar het gemiddelde van de vier getallen te kijken, maar dat leren we pas later.

25 - 27 - 29 - 31

Probleem 8

Probeer eerst A=1 en als dat niet lukt A=2, enzovoort.

A=3

$$\begin{array}{r} AB \\ +\ BA \\ \hline CDC \end{array}$$

Probleem 9

Begin bij punt A en tel alle mogelijke paden.

6 manieren

Probleem 10

Omdat 51 oneven is, heb je een oneven aantal briefjes van 5 euro nodig. Begin met 1 briefje en ga door totdat het aantal briefjes van 5 een te groot totaal oplevert.

5 manieren

Probleem 11

Let erop dat je het zonder tijdverlies doet, dus dat de 15 minuten direct ingaan en niet nadat een zandloper helemaal is doorgelopen.
Draai ze eerst allebei tegelijk om. Als die van 7 klaar is draai je die direct weer om. Vier minuten later is die van 11 klaar. Draai dan die van 7 weer om en vier minuten later is die ook klaar.

Probleem 12

1. Vier munten op elke schaal. De schaal die doorslaat bevat de zwaardere munt. Deze vier vergelijk je weer met de twee schalen. Als laatste vergelijk je de twee zwaarste munten.
2. Leg op elke schaal drie munten.
a) In evenwicht, vergelijk dan de resterende twee.
b) Niet in evenwicht, vergelijk dan twee van de zwaarste drie.
3. Vergelijk op elke schaal twee munten.
a) In evenwicht, vergelijk dan drie van deze goede munten met drie nog niet gewogen munten.
i) In evenwicht, vergelijk dan de laatste met een goede.
ii) Niet in evenwicht, vergelijk dan twee van de drie verdachte munten met elkaar.
b) Niet in evenwicht, doe dan zoals bij a), maar dan met de andere munten.

Probleem 13

Er zijn 36 mogelijke worpen. Tel de worpen met uitkomst 7. Dat zijn er 6.

1 op 6

Probleem 14

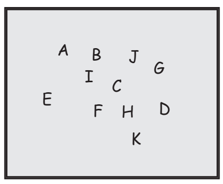
Begin met x=1 en zoek zo alle mogelijkheden. Je vindt zo 6 paren. Je kunt nog bedenken dat de afstand tussen twee opvolgende x-waarden 3 moet zijn.

x	y
2	30
5	25
8	20
11	15
14	10
17	5

6 paren

Probleem 15

Op de eerste positie heb je 2 mogelijkheden en op de laatste 1. Dan heb je voor positie 2, 3 en 4 respectievelijk 9, 8 en 7 mogelijkheden over. Het totaal aantal mogelijkheden is dan 2x9x8x7x1=1008.



1008 codes

Probleem 16

De tweede klant koopt twee keer zoveel. Dat betent dat het toaal aantal verkochte liters wijn een drievoud moet zijn. Het toaal aantal liters in de vaten is 119=2(mod 3). Dus moet het biervat ook 2 (mod 3) zijn en dat is alleen het vat van 20 liter.

20 liter

Probleem 17

Per postzegel van 2 cent gaan 10 postzegels van 1 cent. Dat is samen twaalf cent. Een veelvoud daarvan moet deelbaar zijn door 5 (want het restant bestaat uit postzegels van 5 cent). Dan krijgt hij voor 60 cent aan postzegels van 1 en 2 cent.

50 x 1
5 x 2
8 x 5

Probleem 18

De 3 nichtjes krijgen samen 3x5=15 glaasjes, dus er waren 15 kinderen.

15

Probleem 19

Lamp C en D zitten tussen A en B in, dus B geeft het meeste licht.

lamp B

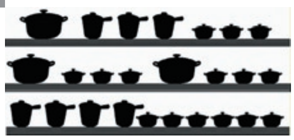
Probleem 20

Ga na dat elk jaar een vrijdag de 13de heeft.

Elk jaar is er een vrijdag de 13de.

Probleem 21

Vul eerst het 9-vat en giet dat over in het 11-vat. Herhaal nu het volgende een aantal keer: vul met het 20-vat het 9-vat en vul met dat 9-vat het 11-vat aan. Giet daarna het 11-vat leeg in het 20-vat en de inhoud van het 9-vat over in het 11-vat. Als we deze reeks herhalen krijgen we achtereenvolgens in het 11-vat 7, 5, 3 en 1. Hierna kunnen we het 9-vat vullen vanuit het 20-vat en dit bij die ene liter in het 11-vat gieten om 10 liter te krijgen.



4, 2 en 2/3.

Probleem 22

In 1 grote pan gaat evenveel als in twee middelgrote (vergelijk de onderste twee planken) dus gaat in een middelgrote pan driemaal zoveel als in een kleine pan (vergelijk de bovenste twee planken). Dus gaat in de kleinste pan 12/18=2/3 liter in in de andere twee maten 2 en 4 liter.

16 dagen

Probleem 23

Elke dag gaat de slak per saldo 1 meter omhoog. De laatste dag gaat hij 5 meter omhoog, dus de dagen daarvoor samen 15 meter. Dat duurt dus 15+1=16 dagen.

20 euro

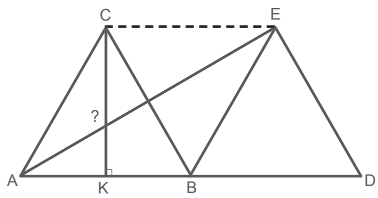
Probleem 24

Per aan- en verkooptransactie verdient hij 10 euro, dus samen 20 euro.

120°

Probleem 25

Trek het lijnstuk CE. Dan is vierhoek ABEC een ruit en is hoek CAE = hoek ACK = 30°. Dus is hoek ? 120°.

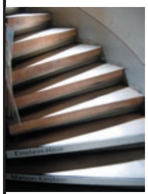


Probleem 26

Stel je hebt een bedrag van € 5,20 in munten van 5 en 20 cent. Je hebt drie keer zoveel munten van 20 cent als van 5 cent. Hoeveel munten heb je?
Let op: dit probleem heb je al eerder opgelost met de strategie *Proberen*. Nu moet je het met een formule oplossen.

Probleem 27

Gebruik de methode van Gauss: trede 1 + trede 100 = 101,
trede 2 + trede 99 = 101, enz. 50x101=5050.



5050
blokjes

Probleem 28

x=ik, z=zoon en k=kleinzoon
z+24=x en k+25=z dus x=k+49.
En k+x=73 dus x=61.

61 jaar

Probleem 29

Als Ard aankomt heeft hij 2,5 keer zover geschaatst als Kees, dus Kees heeft dan pas 600 meter afgelegd. Over de resterende 900 meter doet Kees 6 minuten, dus over de totale 1500 meter doet hij 6 x 1500/900 = 10 minuten.

10 minuten

Probleem 30

De koeien moeten elk 50 meter afleggen. Daar doen ze 50/4000 = 1/80 uur over.
In die tijd legt de vlieg 50000 x 1/80 = 625 meter af.

625 meter

Strategie 5 Structuur ontdekken

	Probleem 31	Probleem 32	Probleem 33
1	V	V	V
2	W	W	W
3	W	W	W
4	V	W	V
5	W	V	W
6	W	W	W
7	V	W	V
8	W	W	W
9	W	V	W
10	V	W	V
11	W	W	W
12	W	W	W
13	V	V	V
14	W	W	W
15	W	W	W
16	V	W	V
17	W	V	W
18	W	W	W
19	V	W	V
20	W	W	W

Voorbeeld: Nim

Oplossing

Als er nog maar twee lucifers liggen kun je er eentje wegpakken en je hebt gewonnen.

ja / ~~nee~~
1 / ~~2~~

Bij drie lucifers pak je er twee weg.

ja / ~~nee~~

Bij vier lucifers kun je er een of twee wegpakken, maar in beide gevallen ga je verleizen.

~~ja~~ / nee

Probleem 31

Je kunt winnen als je start met twintig lucifers.

ja / ~~nee~~

Met zestien lucifers wil je niet beginnen.

~~ja~~ / nee

Probleem 32

Vul weer een tabel in zoals bij het vorige probleem.

ja / ~~nee~~

Probleem 33

Je kunt weer winnen. Zie de tabel.

ja / ~~nee~~

Probleem 34

Uit de tabel blijkt dat je niet kunt winnen.

~~ja~~ / nee

Probleem 35 **let op! correctie**

Als je in een rij **negen** lucifers over hebt, dan kun je winnen (het is een *gewonnen positie*) als je het spel met één rij speelt.
Je kunt winnen als je in een combinatie van twee rijen **negen** lucifers in elke rij over hebt.

ja / ~~nee~~

Dit geldt niet in het algemeen.

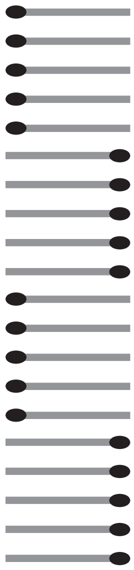
~~ja~~ / nee

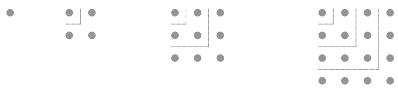
Als beide rijen met evenveel lucifers afzonderlijk een verloren positie zijn, is de combinatie altijd gewonnen.

soms gewon~~nen en soms~~ verloren / gewonnen / ver~~loren~~

+

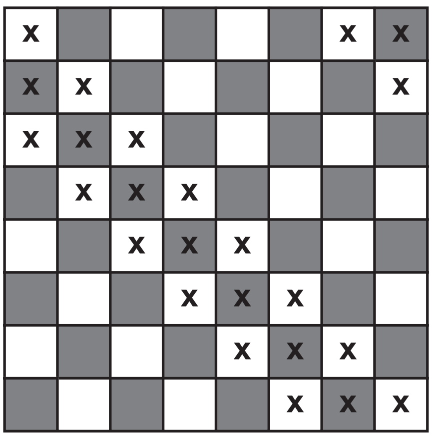
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0		V	W	W	V	W	W	V	W	W	V	W	W	V	W	W	V	W	W	V	W
1	V	W	W	V	W	W	V	W	W	V	W	W	V	W	W	V	W	W	V	W	W
2	W	W	V	W	W	V	W	W	V	W	W	V	W	W	V	W	W	V	W	W	V
3	W	V	W	W	V	W	W	V	W	W	V	W	W	V	W	W	V	W	W	V	W
4	V	W	W	V	W	W	V	W	W	V	W	W	V	W	W	V	W	W	V	W	W
5	W	W	V	W	W	V	W	W	V	W	W	V	W	W	V	W	W	V	W	W	V
6	W	V	W	W	V	W	W	V	W	W	V	W	W	V	W	W	V	W	W	V	W
7	V	W	W	V	W	W	V	W	W	V	W	W	V	W	W	V	W	W	V	W	W
8	W	W	V	W	W	V	W	W	V	W	W	V	W	W	V	W	W	V	W	W	V
9	W	V	W	W	V	W	W	V	W	W	V	W	W	V	W	W	V	W	W	V	W
10	V	W	W	V	W	W	V	W	W	V	W	W	V	W	W	V	W	W	V	W	W
11	W	W	V	W	W	V	W	W	V	W	W	V	W	W	V	W	W	V	W	W	V
12	W	V	W	W	V	W	W	V	W	W	V	W	W	V	W	W	V	W	W	V	W
13	V	W	W	V	W	W	V	W	W	V	W	W	V	W	W	V	W	W	V	W	W
14	W	W	V	W	W	V	W	W	V	W	W	V	W	W	V	W	W	V	W	W	V
15	W	V	W	W	V	W	W	V	W	W	V	W	W	V	W	W	V	W	W	V	W
16	V	W	W	V	W	W	V	W	W	V	W	W	V	W	W	V	W	W	V	W	W
17	W	W	V	W	W	V	W	W	V	W	W	V	W	W	V	W	W	V	W	W	V
18	W	V	W	W	V	W	W	V	W	W	V	W	W	V	W	W	V	W	W	V	W
19	V	W	W	V	W	W	V	W	W	V	W	W	V	W	W	V	W	W	V	W	W
20	W	W	V	W	W	V	W	W	V	W	W	V	W	W	V	W	W	V	W	W	V





1	3	5	...	...	197	199
199	197	195	...	...	3	1
200	200	200	...	...	200	200

$$4 + 2 + 1 - 3 = 4$$



let op! correctie

Als de positie in beide rijen **afzonderlijk verloren** is, dan is de combinatie gewonnen.

soms gewonnen ~~en soms~~ verloren / gewonnen / ~~verloren~~

Als de positie in beide rijen verschillend is, de ene is gewonnen en de andere is verloren, dan is de combinatie soms gewonnen en soms verloren.

soms gewonnen en soms verloren / ~~gewonnen~~ / ~~verloren~~

Probleem 36

Varieer bijvoorbeeld met het aantal lucifers dat je weg mag pakken.

Probleem 37

Het uiteindelijk figuur bestaat uit 100 bij 100 stippen, dus is de som 10.000.
Ter controle: (100 x 200) / 2 = 10000.

Probleem 38

Vier verschillende uitkomsten: 2, 4, 6 en 8.

Probleem 39

Het getal $99.999.999^2$ bevat 7 nullen.
Hint: bekijk eerst eens de getallen 99^2 en 999^2.

Probleem 40

In beide gevallen kun je 24 pionnen kwijt.

Probleem 41

Het laatste cijfer van 7^{77} is 7. Bekijk hiervoor het laatste cijfer van 7^1, 7^2, 7^3, enzovoort, dan ondek je een patroon.

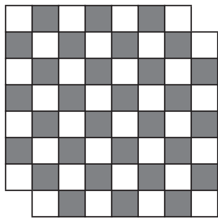
Probleem 42

In het uiterste geval pak je eerst een rode, dan een groene, dan weer een rode, enzovoort. Na vier keer een rode en een groene gepakt te hebben zijn de groene op, dus pak je daarna twee rode achter elkaar. Je hebt dan tien knikkers gepakt.

Probleem 43

Nee, want elke dominosteen bedekt een wit en een zwart veld, maar je hebt 32 witte en 30 zwarte velden.

nee



Probleem 44

Je kunt net als bij een schaakbord de kubusjes om en om wit en zwart kleuren. Als het middelste kubusje zwart is, heb je 13 zwarte en 14 witte kubusjes. De muis gaat van zwart naar wit en weer naar zwart. Hij begint in een zwart kubusje, dus hij kan nooit elke kubusje slechts één keer aandoen.

nee

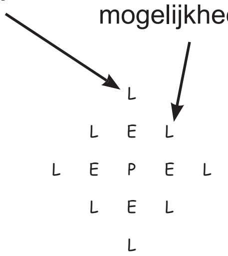
Probleem 45

Als je met de bovenste L begint heb je 12 mogelijkheden. Begin je met de andere L dan zijn het er 24. Deze L's komen 4 keer voor, dus je hebt 4x(12+24)=144 mogelijkheden.

Als je hier begint zijn er 4x3=12 mogelijkheden.

Als je hier begint zijn er 2x4x3=24 mogelijkheden.

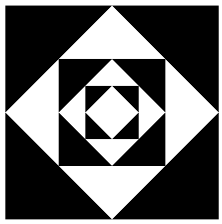
144



Probleem 46

Na één generatie is de helft zwart, na twee generaties 1/2 + 1/4, na drie generaties 1/2 + 1/4 − 1/8, enzovoort. Na tien generaties:

1/2 + 1/8 + 1/32 + 1/128 + 1/512 + 1/1024



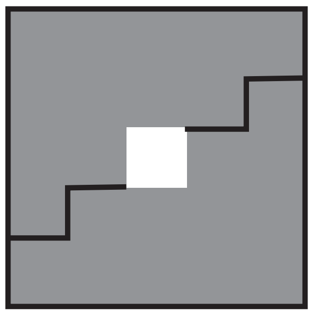
Probleem 47

Op zes punten zit geen salami, dus alleen mozzerella. Op 10−6=4 punten zit dus zowel mozzerella als salami.

4

Probleem 48

Zie tekening hiernaast.



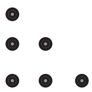
Probleem 49

Als er negen vrouwen zijn en daar zitten negen mannen tegenover, houd je nog altijd twee mannen over die tegenover elkaar moeten zitten.

49 x 99 = 4851
ook 4851 bij maximaal 1 keer overstappen

Probleem 50

Er zijn aanvankelijk (100x99)/2=50x99 verbindingen. Als je alle luchthavens langs één lijn verbindt, heb je nog maar 99 verbindingen nodig; dus je kunt er dan 49x99=4851 opheffen. Je kunt ze ook in een ster verbinden: één luchthaven in het midden en die verbinden met alle andere luchthavens. Dan heb je nog steeds maar 99 verbindingen nodig en je hoeft maxivmaal maar één keer over te stappen.



Probleem 51

Zie figuur hiernaast.

500

Probleem 52

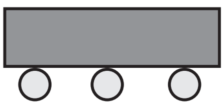
De worm begint bij pagina 1 van deel 1. In de boekenkast zit die pagina aan de kant van deel 2. Dus als hij daar begint gaat hij niet door de pagina's van deel 1, maar direct naar deel 2. Pagina 1000 van deel 3 zit helemaal aan de kant van deel 2, dus de worm stopt als hij bij deel 3 aankomt. Hij heeft dan alleen de bladen van deel 2 doorboord en dat zijn er 500.

zeshoek : driehoek = 3 : 2

Probleem 53

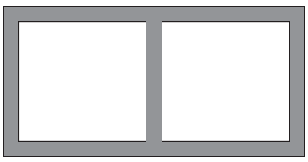
De zijde van de driehoek is twee keer zo groot als de zijde van de zeshoek. De regelmatige zeshoek kun je opdelen in zes gelijkzijdige driehoeken. Elk van deze driehoeken heeft een oppervlakte van een kwart van de oppervlakte van de grote driehoek. Dus de verhouding is 6:4 = 3:2.

2 meter



Probleem 54

De rollers zijn een meter vooruit gegaan en de plaat is een meter ten opzichte van de rollers vooruit gegaan, dus in totaal is de plaat twee meter vooruit gegaan.



13,6 m^3

Probleem 55

David heeft 17x8x0,1=13,6 m^3 tuinaarde nodig.

Probleem 56

Er ontbreekt helemaal geen euro!

Probleem 57

Het lichtst is het bijvoorbeeld om 08:56.
Het donkerst is het om 11:11.

Problemen

Probleem 58

Strategie: F

j + p = 90.
p – j = ½ p , dus j = ½ p.
Dus ½ p + p = 90.
p = 60 en j = 30.

Jan = 30 kg
Piet = 60 kg

Probleem 59

Strategie: C

Eén kip ligt in één dag een kwart ei, dus tien kippen in tien dagen 25 eieren.

25

Probleem 60

Strategie: A

De eerste man kan geen ridder zijn, dus is hij een schurk. Als de tweede man een schurk is, dan liegt hij en is de derde man ook een schurk, maar dat kan niet want dan spreekt de eerste man de waarheid. Dus de tweede man si een ridder en dan is de derde een schurk.

schurk

Probleem 61

Strategie: F

De laatste minuut, voordat de auto's op elkaar botsen, legt de ene auto 80/60 km af en de andere 130/60 km. Dus een minuut voor de botsing is de afstand 210/60 = 3,5 km.

3,5 km

Probleem 62

Strategie: C

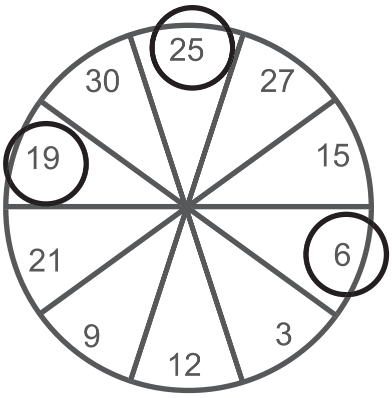
a b d c

Probleem 63

Strategie: C

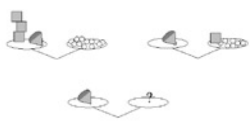
Vul het 4-vat. Giet 3 liter over in het 3-vat. Gooi het 3-vat leeg en giet de liter in het 4-vat over in het 3-vat. Vul het 4-vat weer en giet 2 liter hiervan over in het 3-vat. In het 4-vat zit dan 2 liter.

66



33 sec.

9 knikkers



Probleem 64

Strategie: S

1 2 4 8 16 32 (x 2)

1 4 3 6 5 8 (+ 3, − 1)

1 2 4 7 11 16 22 (+ 1,+ 2,...)

1 1 2 3 5 8 13 21
Fibonacci

2 3 5 7 11 13 17 19
priemgetallen

Probleem 65

Strategie: P

11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 66

Probleem 66

Strategie: P

Het is mogelijk; zie hiernaast.

Probleem 67

Strategie: F

Een interval tussen twee slagen duurt 15 / 5 = 3 seconden. Tussen twaalf slagen zitten elf intervallen, dus 33 seconden.

Probleem 68

Strategie: F

3b + t = 12k
t = b + 8k
Dus 3b + b + 8k = 12k.
Dus b = k en t = 8k.
Dus een tol weegt 9 knikkers.

Probleem 69

Strategie: P of F

Henk verliest per ronde 10 seconde op Marlies, dus na 6 ronden heeft hij 60 seconde verloren. Dan heeft Henk 6 ronden en Marlies 7 ronden gelopen, in 420 seconde.

420 seconde

Probleem 70

Strategie: C

Karel is niet mooi, dus die valt af. Bert, Pieter en Fred zijn minder mooi dan Alfred, dus die vallen ook af. Hans is niet zo slim als Karel, dus die valt ook af.
Blijft Alfred over.

Alfred

Probleem 71

Strategie: S

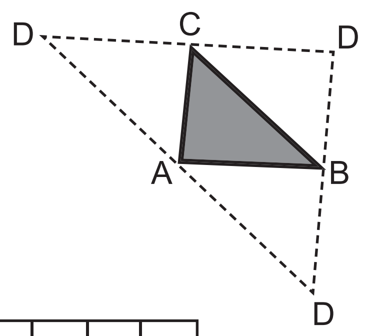
De eerste hangt haar zakdoek precies in het midden. Daarna kan zij haar zakdoek ophangen gespiegeld ten opzichte van de ander. Zij hangt dan altijd de laatste op.

Probleem 72

Strategie: P en A

Trek door elk punt (A, B en C) een lijn evenwijdig aan de tegenoverliggende zijde van de driehoek. De resulterende driehoek levert de drie mogelijke punten D.

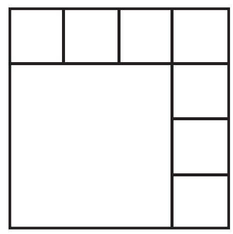
3



Probleem 73

Strategie: P

Zie de tekening hiernaast.

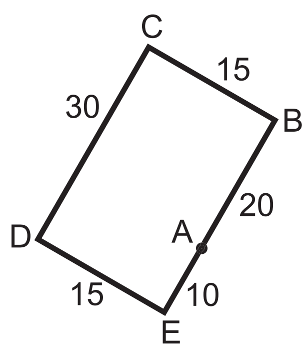


Probleem 74

Strategie: M

De afstand van A naar E is 10 km. Zie het model hiernaast.

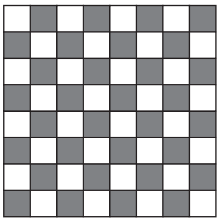
10 km



Probleem 75

Strategie: S en A

Ontdek dan een structuur en ga alle mogelijkheden na.
In elke rij staat 1 toren. In de eerste rij kan de toren op 4 verschillende plaatsen staan. In de tweede rij ook op 4 plaatsen. Dat geeft al 4 x 4 mogelijkheden. In de derde rij zijn dan nog 3 plaatsen vrij en in de vierde ook, enzovoort. In totaal zijn er dus 4 x 4 x 3 x 3 x 2 x 2 = 576 mogelijkheden.



4 x 4 x 3 x 3 x 2 x 2 = 576

Probleem 76

Strategie: C en S

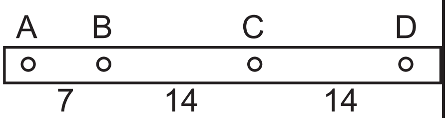
Zie figuur hiernaast.

Gr	W	B	Ge
B	Ge	R	Gr
R	Gr	W	B
W	B	Ge	R

Probleem 77

Strategie: M en F

Teken een model, zoals hiernaast.
Noem de punten A, B, C en D.
AD = 35, BC = 2 x AB, CD = BC = 2 x AB.
Dus AD = AB + BC + CD = AB + 2xAB + 2xAB = 5 x AB.
Dus AB = 7, BC = 14 en CD = 14.



Probleem 78

Strategie: A of S

De eerste schudt 5 maal een hand, de tweede nog eens 4 maal, enzovoort.
Dus in totaal 4 + 3 + 2 + 1 = 10.

10

Probleem 79

Strategie: F

Je hebt van elke soort n munten. Het totaalbedrag is dan n + 5n + 10n + 20n = 36n = 14400. Dus n = 400.

400

Probleem 80

Strategie: F

Je fietst t uur.
20t = 1 + 15t, dus t is 1/5 uur (12 minuten).

12 minuten

Probleem 81

Strategie: C

Begin bij de 90. Het enige getal dat in aanmerking komt is 97 (verschil van de cijfers moet 2 zijn), maar dit is niet deelbaar door 3. Hetzelfde geldt voor 86. Met 75 gaat het wel.

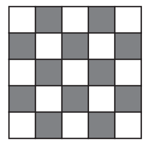
75

Probleem 82

Strategie: M en S

Maak een model van het bord en breng een structuur van witte en zwarte velden aan, zoals bij een schaakbord.
Er zijn 25 velden, 13 witte en 12 zwarte (of andersom). Ieder lieveheersbeestje moet van een wit naar een zwart veld of andersom. Dus zouden er evenveel witte als zwarte velden moeten zijn, maar dit is niet zo.
Dus het kan niet.

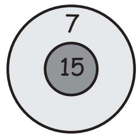
nee



Probleem 83

Dit is een moeilijke opgave. Je kunt beginnen met een groot aantal getallen te proberen en dan een patroon ontdekken.
7 en 15 zijn relatief priem. Dus de getallen 15, 30, 45, 60, 75 en 90 zijn niet deelbaar door 7. De rest bij deling door 7 is 1, 2, 3, 4, 5 respectievelijk 6. Elk getal ≥ 90 kan worden geschreven als een veelvoud van 7 plus een van deze getallen 15, 30, 45, 60, 75 en 90. Hiermee reduceer je het probleem al aanzienlijk.
De algemene formule bij twee getallen a en b die relatief priem zijn is ab − a − b. Dus 7 x 15 − 7 − 15 = 83.

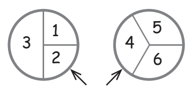
83



Probleem 84

Er zijn vier combinaties die een even som opleveren: 1-5, 3-5, 2-4 en 2-6. De kans is dan (1/4 + 1/2 + 1/4 + 1/4) x 1/3 = 5/12.

5/12



Probleem 85

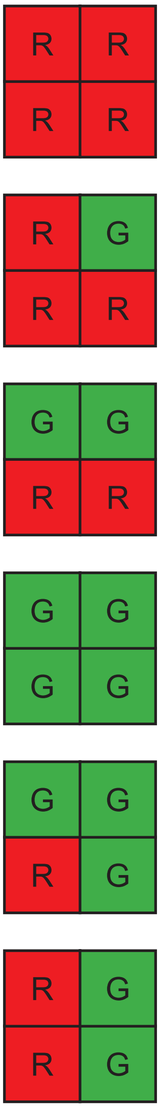
Vervang de 2 door een 6.

$$\begin{array}{ccccccc} & 7 & 4 & 6 & 5 & 8 & 6 \\ + & 8 & 6 & 9 & 4 & 3 & 0 \\ \hline 1 & 6 & 1 & 6 & 0 & 1 & 6 \end{array}$$

Probleem 86

De antwoorden zijn: 1, 3, 5, 0, 2, 1, 3, 4, 3, 4 en 4.
Alleen bij het antwoord 3 zijn er ook zoveel mensen die dat antwoord geven, dus dat moeten de ridders zijn. Er zitten dus 3 ridders in de groep.

3



6

6

a = 50
b = 4
c = 2

Probleem 87

Er zijn zes verschillende manieren om de tegels te kleuren.Zie de diagrammen hiernaast.

Probleem 88

Dit moeten getallen met hoge cijfers zijn.
Er zijn er zes: 988, 898, 889, 997, 979 en 799.

Probleem 89

Kies a = 50, b = 4 en c = 2.
Dan is (a − b) : c = 23 maximaal.