Antwoorden

Magische vierkanten

Vierkant voor Wiskunde – Doeboek 8

1

6	1	8
7	5	3
2	9	4

2
De getallen 1 tot en met 9.

3
15.
15 en 15.
De som van de getallen van elke rij is 15.

4
15.
De som van de getallen van de eerste kolom is 15, net als de som van de getallen van elke rij.
De som van de getallen van de tweede respectievelijk de derde kolom is ook 15.

5
De som van de getallen die op de diagonalen staan is ook 15: 6+5+4=15 en 8+5+2=15.

6

8	1	6
3	5	7
4	9	2

7
Het is niet echt anders. Het magisch vierkant van opgave 6 is gespiegeld ten opzichte van dat van opgave 1.

8

Er zijn acht magische vierkanten te maken met de getallen 1 tot en met 9, die in principe allemaal hetzelfde zijn.
De volgende acht kunnen uit elkaar ontstaan door spiegeling om de horizontale, verticale of diagonale as. Ook kan het ene magische vierkant veranderd worden in een ander door draaiing van de getallen rond de vijf.

								8	3	4				
								1	5	9				
								6	7	2				
									↕					
								4	3	8				
								9	5	1				
								2	7	6				
									↕					
2	7	6		6	7	2		6	1	8		8	1	6
9	5	1	↔	1	5	9	↔	7	5	3	↔	3	5	7
4	3	8		8	3	4		2	9	4		4	9	2
									↕				↕	
								2	9	4		4	9	2
								7	5	3	↔	3	5	7
								6	1	8		8	1	6

9

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

10

15	10	3	6
4	5	16	9
14	11	2	7
1	8	13	12

11

De magische vierkanten van opgave 9 en 10 kunnen niet door spiegeling of rotatie in elkaar overgaan. Het zijn dus verschillende magische vierkanten.

12
Gauss deed een van de volgende twee dingen:
eerste mogelijkheid:
1+100+2+99+3+98+4+97+……… +50+51=
$50 \times 101 = 5050$

tweede mogelijkheid:

$$
\begin{array}{r}
1 + \;\; 2 + \;\; 3 + \;\; 4 + \ldots\ldots\ldots + \;\; 97 + \;\; 98 + \;\; 99 + 100 \\
100 + \;\; 99 + \;\; 98 + \;\; 97 + \ldots\ldots\ldots + \;\; 4 + \;\; 3 + \;\; 2 + \;\; 1 \\
\hline
101 + 101 + 101 + 101 + \ldots\ldots\ldots + 101 + 101 + 101 + 101
\end{array}
\; +
$$

100 x 101 = 10100 en dat is twee keer het juiste antwoord: 100 : 2 x 101 = 5050.

13
$\frac{1}{2}k \times (k + 1)$

14
$n \times C_n$

15
In een magisch vierkant van de orde n staan de getallen 1 tot en met n^2 .

16
$1 + 2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{2}n^2 \times (n^2 + 1)$

17
De magische constante C_n voor een magisch vierkant van de orde n is dan:
$\frac{1}{2}n^2 \times (n^2 + 1) : n = \frac{1}{2}n \times (n^2 + 1)$
$n = 3$: $\frac{1}{2} \times 3 \times (9 + 1) = 1\frac{1}{2} \times 10 = 15$, dat klopt
$n = 4$: $\frac{1}{2} \times 4 \times (16 + 1) = 2 \times 17 = 34$, klopt ook.

18
$C_3=15$

19
$4 \times 15 = 60$

20
Het middelste getal komt drie keer vaker voor in de vier sommen dan de andere getallen.

21
$1+2+ \ldots +9 = \frac{1}{2} \times 9 \times (9 + 1) = 4\frac{1}{2} \times 10 = 45$

22
Dat kun je eenvoudig uitrekenen: 60 – 45 = 15 en dat is drie keer het middelste getal. In het midden van het vierkant staat de 5.

23
De 9. De som is 15, de getallen 1 en 5 zijn al ingevuld: 15 – 1 – 5 = 9.

24
Om de onderste rij magisch te krijgen moetje 6 maken met twee verschillende getallen. Omdat de 1 en 5 al gebruikt zijn blijven alleen de 2 en de 4 over. Wanneer de 2 en de 4 gebruikt zijn, kan de rechter kolom niet meer magisch gemaakt worden.

25
Je kunt de onderste rij invullen.

	1	
	5	
2	9	4

26
De 2 en 4 komen in de lege vakjes van de onderste rij.

27
Het maakt niet uit waar in de onderste rij je de 2 of de 4 zet.

28

6	1	8
7	5	3
2	9	4

Als de 2 en 4 ingevuld zijn, rolt de rest er zo uit.

29
De 5 moet in het midden staan.
De 1 kan niet in een hoek staan.
De plaats van de 9 is altijd in het verlengde van de 1 en de 5.
Rotatie of spiegeling van de getallen geeft geen ander magisch vierkant.
Met deze gegevens kan het vierkant op één manier worden opgelost.

30
Ja.

31

47	58	69	80	1	12	23	34	45
57	68	79	9	11	22	33	44	46
67	78	8	10	21	32	43	54	56
77	7	18	20	31	42	53	55	66
6	17	19	30	41	52	63	65	76
16	27	29	40	51	62	64	75	5
26	28	39	50	61	72	74	4	15
36	38	49	60	71	73	3	14	25
37	48	59	70	81	2	13	24	35

32

144	143	142	9	8	7	6	5	4	135	134	133
132	131	130	21	20	19	18	17	16	123	122	121
120	119	118	33	32	31	30	29	28	111	110	109
37	38	39	100	101	102	103	104	105	46	47	48
49	50	51	88	89	90	91	92	93	58	59	60
61	62	63	76	77	78	79	80	81	70	71	72
73	74	75	64	65	66	67	68	69	82	83	84
85	86	87	52	53	54	55	56	57	94	95	96
97	98	99	40	41	42	43	44	45	106	107	108
36	35	34	117	116	115	114	113	112	27	26	25
24	23	22	129	128	127	126	125	124	15	14	13
12	11	10	141	140	139	138	137	136	3	2	1

33

Voor een magisch vierkant van orde 2 geldt dat de magische constante $C_2=nx(n^2+1):2=5$. Als je nu 1 in een hoek invult, zeg de linker bovenhoek, dan moet je om de bovenste rij kloppend te krijgen rechts bovenin een 4 invullen, maar om de eerste kolom kloppend te krijgen ook links onderen een 4 invullen. Maar dat kan niet. Dus een magisch vierkant van orde 2 bestaat niet.

34

$C_{IV} = ½n \times (n^2 + 1) + 3n^3$
$C_{IV} + C_{II} = ½n \times (n^2 + 1) + 3n^3 + ½n \times (n + 1) + n^3 = n \times (n^2 + 1) + 4n^3$
$C_I + C_{IV} = ½n \times (n^2 + 1) + ½n \times (n + 1) + 3n^3 = n \times (n^2 + 1) + 3n^3$
$C_{III} + C_{IV} = ½n \times (n^2 + 1) + 2n^3 + ½n \times (n + 1) + 3n^3 = n \times (n^2 + 1) + 5n^3$

35

De magische constante voor een magisch vierkant van de orde 2n is
$½ \times 4n^2 \times (4n^2 + 1) : 2n = 4n^2 \times (4n^2 + 1) : 4n = n \times (4n^2 + 1) = 4n^3 + n$
Dat is gelijk aan $n \times (n^2 + 1) + 3n^3$.

36

Het vierkant is inderdaad magisch geworden.

37

x	x	x	x												x	x	x
x	x	x	x												x	x	x
x	x	x	x												x	x	x
x	x	x	x												x	x	x
	x	x	x	x											x	x	x
x	x	x	x												x	x	x
x	x	x	x												x	x	x
x	x	x	x												x	x	x
x	x	x	x												x	x	x
x	x	x	x												x	x	x
x	x	x	x												x	x	x
x	x	x	x												x	x	x
x	x	x	x												x	x	x
	x	x	x	x											x	x	x
x	x	x	x												x	x	x
x	x	x	x												x	x	x
x	x	x	x												x	x	x
x	x	x	x												x	x	x

38

17	*24*	1	8	15	67	74	51	58	*65*
23	*5*	7	14	16	73	55	57	64	*66*
4	*6*	*13*	20	22	54	56	63	70	*72*
10	*12*	19	21	3	60	62	69	71	*53*
11	*18*	25	2	9	61	68	75	52	*59*
92	*99*	76	83	90	42	49	26	33	*40*
98	*80*	82	89	91	48	30	32	39	*41*
79	*81*	*88*	95	97	29	31	38	45	*47*
85	*87*	94	96	78	35	37	44	46	*28*
86	*93*	100	77	84	36	43	50	27	*34*

39

92	*99*	1	8	15	67	74	51	58	*40*
98	*80*	7	14	16	73	55	57	64	*41*
4	*81*	*88*	20	22	54	56	63	70	*47*
85	*87*	19	21	3	60	62	69	71	*28*
86	*93*	25	2	9	61	68	75	52	*34*
17	*24*	76	83	90	42	49	26	33	*65*
23	*5*	82	89	91	48	30	32	39	*66*
79	*6*	*13*	95	97	29	31	38	45	*72*
10	*12*	94	96	78	35	37	44	46	*53*
11	*18*	100	77	84	36	43	50	27	*59*

40

n	n^2+n+41	priemgetal?	n	n^2+n+41	priemgetal?	n	n^2+n+41	priemgetal?
0	41	ja	4	61	ja	8	113	ja
1	43	ja	5	71	ja	9	131	ja
2	47	ja	6	83	ja	10	151	ja
3	53	ja	7	97	ja	11	173	ja

41

n	n^2+n+41	priemgetal?	n	n^2+n+41	priemgetal?	n	n^2+n+41	priemgetal?
34	1231	ja	36	1373	ja	38	1523	ja
35	1301	ja	37	1447	ja	39	1601	ja

42

In het vierkant van de orde 5 ging je naar beneden na het invullen van de getallen
5, 10, 15, 20.
In het vierkant van de orde 7 ging je naar beneden na het invullen van de getallen
7, 14, 21, 28, 35, 42.
In het vierkant van de orde 9 ging je naar beneden na het invullen van de getallen
9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72.
Er is inderdaad regelmaat. In alle gevallen begint de rij met een 1, waarna achtereenvolgens de meervouden volgen van het getal van de orde. Het totaal aantal getallen is telkens even groot als het getal van de orde.

43

n, 2n, 3n, 4n, 5n, 6n, …………… (n – 1)n. De rij is n termen lang.

44

In elke kolom staat één beginpunt.
In elke rij staat één beginpunt.

45

Bij magische vierkanten met een even orde zijn i en jn niet zo mooi verdeeld over de rijen, kolommen en diagonalen. Twee voorbeelden:

vierkant orde 4:

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

i:

4	3	2	1
1	2	3	4
1	2	3	4
4	3	2	1

jn:

12	0	0	12
4	8	8	4
8	4	4	8
0	12	12	0

voor i kloppen de eerste en laatste kolom niet, voor jn kloppen de rijen niet.

vierkant orde 6:

35	1	6	26	19	24
3	32	7	21	23	25
31	9	2	22	27	20
8	28	33	17	10	15
30	5	34	12	14	16
4	36	29	13	18	11

i:

5	1	6	2	1	6
3	2	1	3	5	1
1	3	2	4	3	2
2	4	3	5	4	3
6	5	4	6	2	4
4	6	5	1	6	5

jn:

30	0	0	24	18	18
0	30	6	18	18	24
30	6	0	18	24	18
6	24	30	12	6	12
24	0	30	6	12	12
0	30	24	12	12	6

voor i kloppen de rijen en de diagonalen niet. Voor nj kloppen rijen, kolommen en diagonalen niet.

46

9	2	25	18	11
3	21	19	12	10
22	20	13	6	4
16	14	7	5	23
15	8	1	24	17

20	11	2	49	40	31	22
12	3	43	41	32	23	21
4	44	42	33	24	15	13
45	36	34	25	16	14	5
37	35	26	17	8	6	46
29	27	18	9	7	47	38
28	19	10	1	48	39	30

47
De vierkanten zijn een halve slag gedraaid ten opzichte van elkaar.

48
Wanneer je naar de vierkanten van opgave 46 kijkt, dan zie je dat als je ze van 1 t/m 25 zou invullen, respectievelijk van 1 t/m 49 dat je dat volgens de volgende regels doet:

1. Begin midden in de onderste rij met het getal 1
2. Ga voor het volgende getal één kolom naar links en één rij naar beneden.
    - Als je in de onderste rij zit, ga dan naar de bovenste rij in plaats van naar beneden.
    - Als je in de eerste kolom zit, ga dan naar de laatste kolom in plaats van naar links.
    - Als je niet verder kunt omdat er al een getal staat, ga dan één vakje naar boven, gerekend vanaf het getal dat het eerst is ingevuld.

Door nu de woorden rechts/links te vervangen door links/rechts, beneden/boven door boven/beneden en laatste/eerste door eerste/laatste krijg je precies de regels voor oneven orde weer terug.

49

26	26	26	26	26
26	26	26	26	26
26	26	26	26	26
26	26	26	26	26
26	26	26	26	26

50	50	50	50	50	50	50
50	50	50	50	50	50	50
50	50	50	50	50	50	50
50	50	50	50	50	50	50
50	50	50	50	50	50	50
50	50	50	50	50	50	50
50	50	50	50	50	50	50

De uitkomst is voor het linker vierkant telkens 26 en voor het rechter vierkant telkens 50.
Omdat je telkens optelt $1 + n^2$, $2 + (n^2-1) = 1 + n^2$, $3 + (n^2-2) = 1 + n^2$ enzovoort.

50
De som van de diagonalen in probleem 49 is voor het linker vierkant 130 en voor het rechter vierkant 350.
Dus de som van de diagonalen voor het vierkant van orde 5 is 65 en voor het vierkant van orde 7 is dat 175.

51
Steeds n^2+1. Voor twee opgetelde vierkanten krijg je $n\times(n^2+1)$, dus de som van een diagonaal voor een vierkant van orde n is $n\times(n^2+1)/2$, de magische constante van een vierkant van de orde n.

Antwoord 52 t/m 55:
Hier is iets mis gegaan in het maken van de vragen. Er is vergeten rekening te houden met het feit dat de som van de diagonalen ook moet kloppen. In de voorgestelde alternatieven is dat niet het geval. De rij- en kolomsommen kloppen wel, maar de diagonalen niet. Dat is wel te repareren. Andere sprongen dan recht naar beneden kun je namelijk wel maken, maar je moet wel zorgen dat je vierkant zodanig wordt ingevuld dat als je het roteert je precies k en n^2+1-k op elkaar legt. Dat kan door in het midden te beginnen met het middelste getal en de diagonaal van linksonder naar rechtsboven oplopend in te vullen. Laten we een 7×7 vierkant als voorbeeld nemen. Je begint dan met het invullen van 25 in het midden en vervolgens de diagonaal naar rechtsboven oplopend en tegelijkertijd naar linksonder aflopend in te vullen. Dan krijg je dit:

						28
					27	
				26		
			25			
		24				
	23					
22						

Nu kun je kiezen wat voor sprong je maakt. Dus in plaats van een naar beneden vanuit 28 kun je ook twee naar beneden springen (en teruglopend vanuit 22 dus twee omhoog).
Je krijgt dan:

						28
					27	
				26		29
			25			
21		24				
	23					
22						

Nu kun je het vierkant verder afmaken. Dan vind je uiteindelijk

5	31	8	41	18	44	28
30	14	40	17	43	27	4
13	39	16	49	26	3	29
38	15	48	25	2	35	12
21	47	24	1	34	11	37
46	23	7	33	10	36	20
22	6	32	9	42	19	45

Voor een 7×7 vierkant kun je in plaats van een sprong van 2 ook een sprong van 3 nemen. Bij een 9×9 vierkant kan dat echter niet. Je zult zien dat je dan na drie keer drie naar beneden springen een probleem krijgt omdat er dan in dat hokje al een getal staat. Waar je voor moet zorgen is dat je spronggrootte en orde relatief priem zijn (geen gemeenschappelijke delers hebben). De getallen 7 en 3 zijn relatief priem, maar 3 en 9 niet (gemeenschappelijke deler: 3). Vervolgens kun je in plaats van recht naar beneden ook zowel naar beneden als naar rechts springen. Maar ook hier moet je weer oppassen. Dat naar rechts springen is equivalent met naar beneden springen (dwz je komt in een vergelijkbare schuine rij terecht), dus de som van het aantal dat je naar beneden springt en naar rechts springt moet wel weer relatief priem zijn met de orde van je magisch vierkant.

56

i

4	3	2	1
1	2	3	4
1	2	3	4
4	3	2	1

i

8	7	6	5	4	3	2	1
8	7	6	5	4	3	2	1
1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7	8
8	7	6	5	4	3	2	1
8	7	6	5	4	3	2	1

57

jn

12	0	0	12
4	8	8	4
8	4	4	8
0	12	12	0

jn

56	56	0	0	0	0	56	56
48	48	8	8	8	8	48	48
16	16	40	40	40	40	16	16
24	24	32	32	32	32	24	24
32	32	24	24	24	24	32	32
40	40	16	16	16	16	40	40
8	8	48	48	48	48	8	8
0	0	56	56	56	56	0	0

58

Per rij staan bij de i's de getallen 1 t/m n, dus die som is steeds hetzelfde. Bovendien staat in de ene helft van de kolommen 1 t/m n en in de andere helft n t/m 1, dus ook de som per kolom is hetzelfde.

Voor de jn's staan in elke kolom 0,n, 2n, …, (n–1)×n, dus ook daarvoor is de som per kolom steeds hetzelfde. Tot slot staan voor de jn's in elke rij steeds paren [0,(n–1)×n], [n,(n–2)×n], …, [$n^2/2$, $n^2/2$–n] dus is daarvoor ook de som per rij steeds hetzelfde.

59

De reden dat de som van de diagonalen klopt, is eigenlijk dezelfde als bij magische vierkanten van oneven orde (zie vraag 51). Als je het vierkant van achterennaar voren invult krijg je hetzelfde vierkant maar dan een halve slag gedraaid. Wanneer je dus een vierkant optelt bij hetzelfde vierkant dat een halve slag gedraaid is, dan vind je weer in elk vakje n^2+1.

60

Als je naar het vierkant van orde 8 kijkt, dan zie je dat zowel de eerste als tweede rij omgedraaid zijn, als de onderste en op een na onderste rij. Het vierkant van de i's is dus onveranderd en in het vierkant van de jn's zijn de eerste en tweede rij tezamen met de laatste twee rijen verwisseld. Voor de rijsommen en kolomsommen maakt deze verwisseling niet uit, en doordat je zowel boven als bjbehorend beneden verwisselt maakt het voor de diagonaalsommen ook niet uit.

Evenzo zijn in het voorbeeld van deze opgave rijen 3 en 4 verwisseld met hun "broertjes" 5 en 6, maar dat was niet noodzakelijk.

61

		1^{ste} helft: $3n^2$	2^{de} helft: n^2
orde 6	n=3	$27 = 3n^2$	$9 = n^2$
orde 10	n=5	$75 = 3n^2$	$25 = n^2$
orde 14	n=7	$147 = 3n^2$	$49 = n^2$

62
In de eerste helft (I, IV) wordt één getal per rij verwisseld voor n=3, twee getallen per rij voor n=5 en drie getallen per rij voor n=7. Dus dat zijn (n–1)/2 getallen per rij voor willekeurige n.
In de tweede helft (II, III) worden nul getallen per rij verwisseld voor n=3, één getal per rij voor n=5 en twee getallen per rij voor n=7. Dus dat zijn (n–3)/2 getallen per rij voor willekeurige n.

63
De rijsom neemt door verwisseling met $(n–1)/2\times3n^2$ toe/af door verwisseling van getallen in de eerste helft en met $(n–3)/2\times n^2$ af/toe door verwisseling van getallen in de tweedehelft.

64
In de eerste helft (I, IV) worden twee getallen per rij verwisseld voor n=3, drie getallen per rij voor n=5 en vier getallen per rij voor n=7. Dus dat zijn (n+1)/2 getallen per rij voor willekeurige n.
In de tweede helft (II, III) worden nul getallen per rij verwisseld voor n=3, één getal per rij voor n=5 en twee getallen per rij voor n=7. Dus dat zijn (n–3)/2 getallen per rij voor willekeurige n.

65
De diagonaalsom neemt door verwisseling met $(n+1)/2\times3n^2$ toe/af door verwisseling van getallen in de eerste helft en met $(n–3)/2\times n^2$ toe/af door verwisseling van getallen in de tweede helft.

66
De rijsom voor de bovenste helft is voor verwisseling gelijk aan $n\times(n^2+1)+2\times n^3$. Door verwisseling in de eerste helft neemt die rijsom met $(n–1)/2\times3n^2$ toe en door verwisseling in de tweede helft met $(n–3)/2\times n^2$ af. De rijsom na verwisseling wordt dan $n\times(n^2+1)+2\times n^3 + (n-1)/2\times3n^2 – (n–3)/2\times n^2 = n\times(n^2+1)+3\times n^3$, de magische constante voor een vierkant van orde $2\times n$.
Evenzo wordt de rijsom voor de onderste helft na verwisseling gelijk aan $n\times(n^2+1)+3\times n^3$.
De diagonaalsom voor de diagonaal van linksboven naar rechtsbeneden is voor verwisseling gelijk aan $n\times(n^2+1)+n^3$. Door verwisseling in de eerste helft neemt die rijsom met $(n+1)/2\times3n^2$ toe en door verwisseling in de tweede helft met $(n–3)/2\times n^2$ toe. De diagonaalsom na verwisseling wordt dan $n\times(n^2+1)+n^3 + (n+1)/2\times3n^2 + (n–3)/2\times n^2 = n\times(n^2+1)+3\times n^3$, de magische constant voor een vierkant van orde $2\times n$. Evenzo wordt de andere diagonaalsom na verwisseling gelijk aan $n\times(n^2+1)+3\times n^3$.

67
Ja, omdat het aantal verwisselingen per rij en per diagonaal gelijk is aan het vorige verwisselingsschema.

68

Errata: Verwijder verwisselingsschema 6 bij deze opgave.

Voor grotere ordes, zoals 10 en 14, zijn eenvoudig andere verwisselingsschema's aan te geven. Bijvoorbeeld door voor de verwisseling in vierkanten II en III andere kolommen gebruiken. Elke keuze van (n–3)/2 kolommen is prima. Het gaat erom dat het totale aantal verwisselingen per rij/diagonaal (per helft) niet verandert.

92	*99*	1	8	15	67	74	*26*	58	65
98	*80*	7	14	16	73	55	*32*	64	66
4	*81*	*88*	20	22	54	56	*38*	70	72
85	*87*	19	21	3	60	62	*44*	71	53
86	*93*	25	2	9	61	68	*50*	52	59
17	*24*	76	83	90	42	49	*51*	33	40
23	*5*	82	89	91	48	30	*57*	39	41
79	*6*	*13*	95	97	29	31	*63*	45	47
10	*12*	94	96	78	35	37	*69*	46	28
11	*18*	100	77	84	36	43	*75*	27	34

69

½k × (k+1) = ½ × 27 × (27+1) = 13½ × 28 = 378

70

De magische constante voor een magische kubus van de orde 3 is 42, namelijk 378 : 9 = 42. Je deelt 378 door 9 omdat er in de kubus (per richting) negen keer drie getallen op een rijtje naast elkaar liggen.

71

De magische constante van een kubus van de orde n is $\frac{1}{2}n^3 \times (n^3 + 1) : n^2 = \frac{1}{2}n \times (n^3 + 1)$.

72

Het getal dat in het midden moet komen is 14. In hoofdstuk 3 heb je geleerd hoe je in een magisch vierkant van orde 3 het middelste getal kunt berekenen. Hier gaat dat eigenlijk net zo. Het middelste getal ligt in een vlak met acht getallen er omheen. Hiermee kan, net als bij een magisch vierkant, vier maal de magische som gekregen worden. Daarnaast kan dat per vlak er naast ook nog eens drie keer 4 + 3 + 3 = 10. Tien keer de magische constante is 420. Het middelste getal is vier keer meegeteld, de overige getallen zijn dat één keer: 420 – 378 = 42. Dus is 42 drie keer het getal in het midden. 42 : 3 = 14.

73
Bekend zijn 2, 5, 6, 14 en 15. De magische som is 42.
Je kunt achtereenvolgens de vet geschreven getallen berekenen en invullen:

16 + 6 + **20** = 42
16 + 5 + **21** = 42
16 + 2 + **24** = 42
20 + 14 + **8** = 42
21 + 14 + **7** = 42
24 + 14 + **4** = 42

16 + 14 + **12** = 42
20 + 4 + **18** = 42
18 + 5 + **19** = 42
21 + 4 + **17** = 42
7 + 24 + **11** = 42
24 + 8 + **10** = 42

12 + 8 + **22** = 42
12 + 7 + **23** = 42
23 + 10 + **9** = 42
6 + 11 + **25** = 42
5 + 10 + **27** = 42
21 + 8 + **13** = 42

2 + 25 + **15** = 42
27 + 14 + **1** = 42
15 + 1 + **26** = 42
26 + 13 + **3** = 42

Het resultaat:

20	18	4
6	19	17
16	5	21

boven

15	1	26
25	14	3
2	27	13

midden

7	23	12
11	9	22
24	10	8

onder

74
Misschien dat deze opgave niet helder genoeg geformuleerd is. Wat bedoeld wordt is "Kun je vierkanten van 3×3 vinden waarbij voor elke rij,elke kolom en beide diagonalen de som hetzelfde is?"…

75
1 + 7 + 13 + 31 + 37 + 43 + 61 + 67 + 73 = 333
De magische constante van het vierkant is 333 : 3 = 111

76
Tel de getallen van de diagonalen en van de middelste horizontale en verticale lijn bij elkaar op: 111 + 111 + 111 + 111 = 444.
Alle getallen zijn een keer geteld, behalve het middelste getal dat vier keer geteld is, drie keer vaker dan de rest. Het middelste getal is daarom (444 – 333) : 3 = 111 : 3 = 37.

77

67	1	43
13	37	61
31	73	7

Je kunt een soortgelijke strategie volgen als bij het bewijs dat een vierkant van orde 3 uniek is. Stel dat 1 in de bovenste rij staat. Dat betekent dat 73 er tegenover in de onderste rij komt. Om de onderste rij magisch te krijgen moet je nog 38 maken met twee verschillende getallen. Daarvoor komen alleen de 7 en de 31 voor in aanmerking. Daarom moet de 1 dus in de middelste kolom staan en vervolgens kun je het vierkant uniek invullen.

78
Het laatste getal van de eerste rij is *216:12:1=18*.
Het onderste getal van de eerste kolom is *216:12:9=2*.
Het middelste getal van het vierkant is *216:18:2=6*.
Het onderste getal van de tweede kolom is *216:1:6=36*.
Het tweede getal van de laatste kolom is *216:9:6=4*.
Het laatste getal van de derde rij is *216:2:36=3*.

12	1	18
9	6	4
2	36	3

79
In elk van de twee magische zeshoeken staan vier rijsommen aangegeven. In de linker zeshoek worden de witte vakjes één keer meegenomen, en de rechter nul keer. In de linker wordt het zwarte vakje één keer meegenomen en in de rechter twee keer. Omdat het in beide gevallen vier rijsommen betreft moet dus wat in het extra zwarte vakje staat gelijk zijn aan wat in de drie witte vakjes minder staat. Dus wat in het zwarte vakje staat is gelijk aan wat in de drie witte vakjes bij elkaar opgeteld staat.

80
½k × (k+1) = (19:2) × (19+1) = 9½ × 20 = 190
190 : 5 = 38
De magische constante is 38.

81
Cel onder *6*: *38-17-1-6=14.*

Het totaal van de getallen in de linkerrij en de rechterrij is hetzelfde: som *38*. Het bovenste getal uit de honingraat komt in beide rijen voor. Daarom is het getal links boven *16 1* groter dan het getal links onder *17*.
Je hebt de volgende getallen over: *3*, *4*, *5*, *8*, *9*, *11*, *13*, *15*, *18* en *19*. De getallen die je zoekt kunnen dus zijn *3* en *4* of *8* en *9* of *18* en *19*. Links boven *16* kan geen *4* of *9* staan. Voor een *4* heb je in de cel links onder de *1* het getal *26* nodig. Dat is er niet. Voor de *9* heb je *21* nodig, die is er ook niet. Dus komt *19* links boven de *16*. Dan komt *18* links onder *17*.

Je kunt de honingraat zonder problemen verder invullen.
Cel boven *7: 38-18-17=3.*
Cel onder *18*: *38-19-7-1=11.*
Cel onder *11*: *38-18-11=9.*
Cel onder *7*: *38-16-2-6-9=5.*
Cel onder *12*: *38-16-12=10.*
Cel onder *2*: *38-18-1-5-10=4.*
Cel onder *5*: *38-12-4-14=8.*
Cel onder *8*: *38-9-14=15.*
Cel onder *4*: *38-10-15=13.*