Antwoorden Doeboek 24 Grafen.

1. De middelste en de rechtergraaf.

2. Een onsamenhangende graaf met vijf punten en vijf lijnen: Teken een vierhoek met één diagonaal. Het vijfde punt is niet verbonden met een van de overige punten.
Een onsamenhangende graaf met vijf punten en zeven lijnen is er niet, want als je zoveel mogelijk lijnen wilt tekenen, verbind je één van de punten niet met de overige punten en de vier punten die overblijven kun je maar met hoogstens zes lijnen verbinden. Ook een tweetal componenten met twee en drie punten kan niet.

3. Elke lijn van een graaf draagt twee bij tot de som van alle graden.

4. De som van alle graden is 16, dus er zijn 8 lijnen.

5. 15 lijnen.

6. Elk punt heeft graad tien. De graaf heeft 1024 punten. Het aantal lijnen is 5120.

7. Het maximale aantal lijnen bij een graaf met vijf punten is tien, bij een graaf met tien punten is dat aantal vijfenveertig en bij een graaf met n punten zijn er maximaal $\frac{1}{2}n(n-1)$ lijnen.

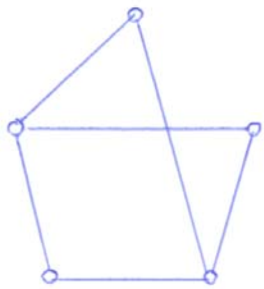
8. Het is geen tweedelingsgraaf, want de graaf bevat een driehoek.

9. Je kunt tien verschillende tweetallen punten kiezen uit de vijf punten. Bij elk tweetal zijn er twee mogelijkheden: je verbindt de punten of niet. Dit geeft een totaal van $2^{10}=1024$ grafen. Deze grafen zijn niet alle verschillend; er zijn nogal wat isomorfe grafen bij. Op tien punten vind je op dezelfde manier 2^{45} grafen en op n punten zijn er $2^{\frac{1}{2}n(n-1)}$ grafen.

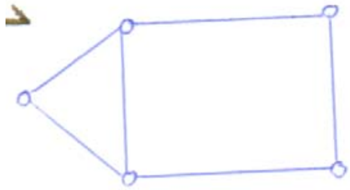
10. Alle grafen hebben een pad met lengte vier en allemaal hebben ze een cykel. De linker- en de rechtergraaf hebben één driecykel en de middelste graaf heeft vijf driecykels.

11. Linkergraaf: het langste pad heeft lengte zeven en het kortste cykel heeft lengte vier.
Middelste graaf: het langste pad heeft lengte acht en het kortste cykel heeft lengte vier.
Rechtergraaf: het langste pad heeft lengte tien en het kortste cykel heeft lengte vijf.

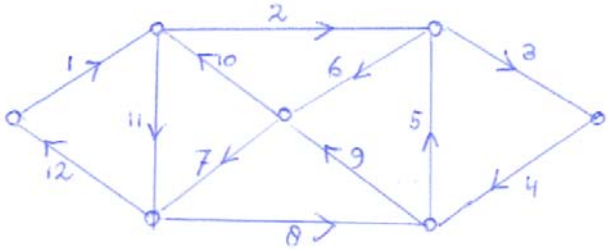
12.



13.



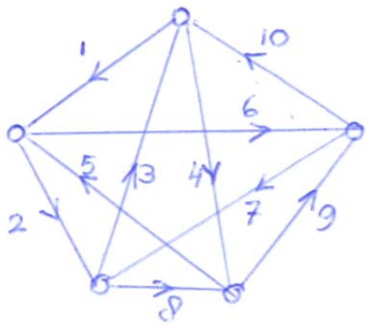
14.



15. K_5 is wel een Eulergraaf maar K_6 niet **.**

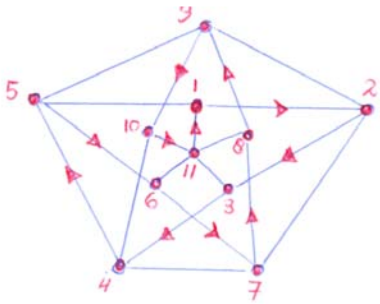
16. De graaf is geen Eulergraaf, want er zijn twee punten met verbindingsgraad drie. Als het beginpunt een ander punt is dan het eindpunt kun je het huisje tekenen zonder je pen van het papier op te lichten.

17. De linkergraaf is geen Eulergraaf, de rechtergraaf wel.

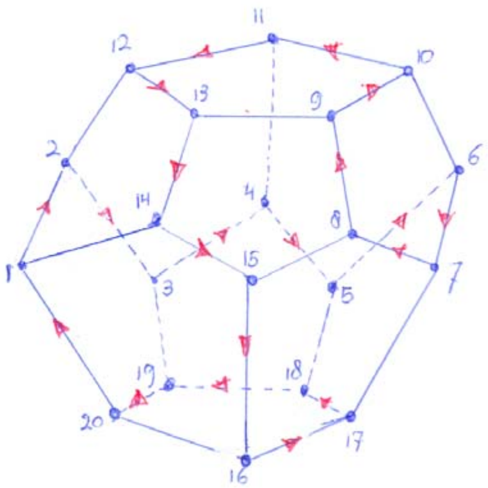


18. Als het Eulercircuit een punt passeert geeft dit een bijdrage van twee tot de verbindingsgraad van dat punt. Omdat elke lijn maar één keer in het Eulercircuit voorkomt, moet elk punt een even graad hebben.

19.



20.



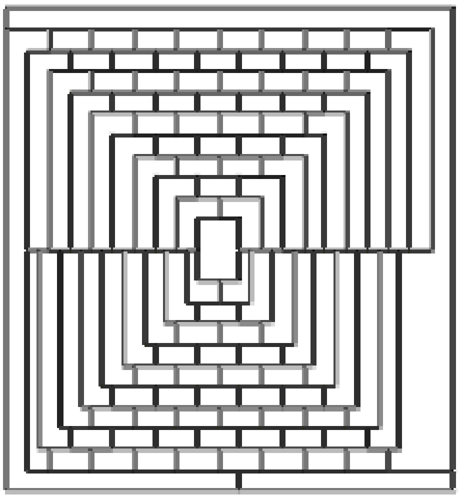
21. De Petersengraaf heeft geen Hamiltoncykel.

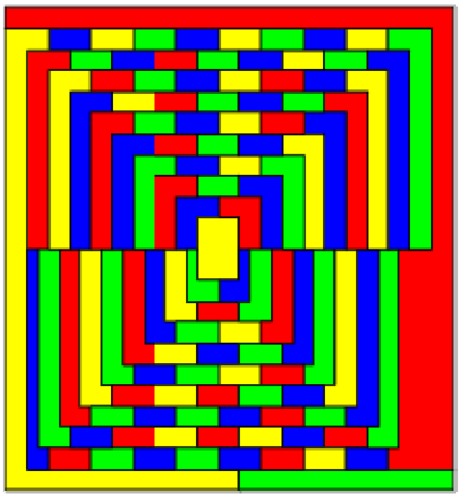
22. Het paard moet dan 25 sprongen maken. Omdat dit een oneven aantal is, komt het paard bij de laatste sprong op een vak terecht dat een andere kleur heeft dan het vak waar het paard is gestart.

23. vier kleuren.

24. Er zijn 48 verschillende kleuringen mogelijk.

25.





.

26. Linkergraaf: 3; middelste graaf: 2 ; rechtergraaf: 2.

27. Het kleuringsgetal is gelijk aan *n*.

28. Het kleuringsgetal is 4.

29. Het kleuringsgetal is 3

30. Linkergraaf: 4; middelste graaf : 5; rechtergraaf : 3.

31. Het lijnkleuringsgetal is 3.

32. Het lijnkleuringsgetal is 4.

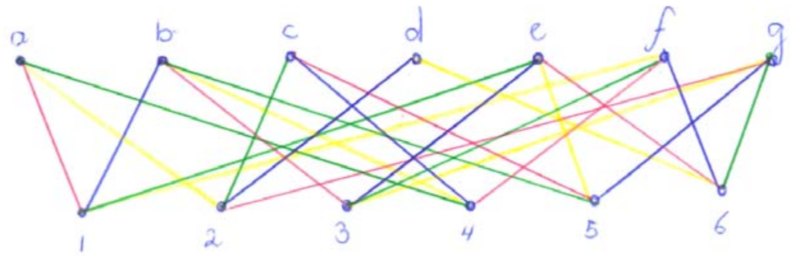
34. In dat geval kun je de lijn die *u* en *v* verbindt en waaraan nog geen kleur was toegekend met de ontbrekende kleur kleuren.

35. Je kunt met het pad alleen in *v* aankomen met een blauwe lijn, omdat het *u*-*v* pad oneven lengte heeft. Maar de kleur blauw was juist niet gebruikt om de lijnen die in *v* samenkomen te kleuren.

36. In de punten van het pad wordt de vertrekkende lijn groen en de lijn die aankomt wordt blauw en dus komt bij geen enkel punt van het pad een tweetal gelijk gekleurde lijnen voor na de verwisseling van de twee kleuren. Bij de punten die niet tot het pad behoren is er niets veranderd.

37. Na de verwisseling van de twee kleuren is bij punt u nog de kleur blauw niet gebruikt. Omdat punt v niet in het pad voorkwam is er niets veranderd en is ook daar de kleur blauw nog beschikbaar. Je kunt dus nu de verbindingslijn van u en v met blauw kleuren**.** Zoek nu een volgende ongekleurde lijn en herhaal de procedure tot alle lijnen gekleurd zijn.

38 en 39



40.

	1	2	3	4	5	6
a	1	4		3		
b	2		1	4	3	
c		3		2	1	
d		2				4
e	3		2		4	1
f	4		3	1		2
g		1	4		2	3

41.

	1	2	3	4	5	6	7
a	3		4	1	2		
b	2	1	3			4	
c				2	1	3	4
d	4	2				1	3
e	1		2	4	3		
f		4		3		2	1
g		3	1		4		2

42. Van de drie getekende grafen zijn *K* en *L* opspannende deelgrafen van *G*.

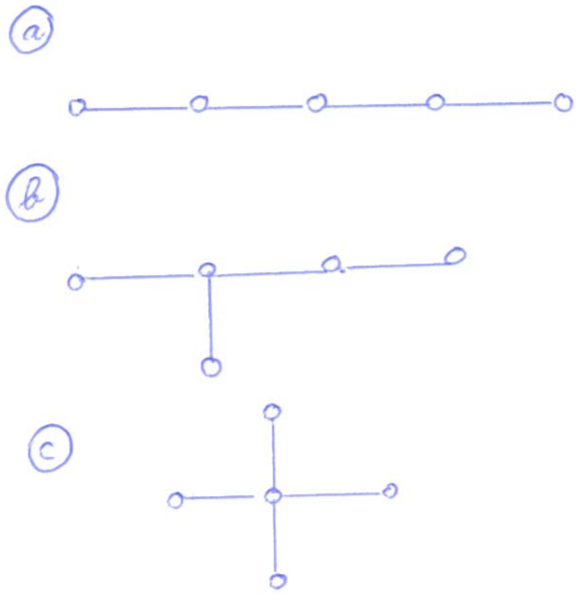
43. Stel graaf G is een boom en v en w zijn punten van G. Omdat **G** samenhangend is, is er een pad van v naar w. Als je de lijn toevoegt die v en w verbindt, vormt die lijn samen met het pad een cykel.

44. Als zo’n lijn er niet zou zijn, dan zou uit elk punt waarin een lijn aankomt er ook weer een vertrekken. Als je een wandeling start bij een punt v van zo’n graaf dan kom je op een gegeven moment weer bij een punt dat je al eerder bent gepasseerd,w ant er zijn maar eindig veel punten. met andere woorden: je hebt een cykel. Maar een boom heeft geen cykels.

45. De graaf die ontstaat is weer een samenhangende graaf zonder cykels, dus een boom.

46. Als je niet meer verder kunt, zijn alle punten op één na weg en alle lijnen. Het aantal lijnen dat je hebt weggelaten is dus $n-1$.

47. Er zijn drie niet-isomorfe bomen op vijf punten.

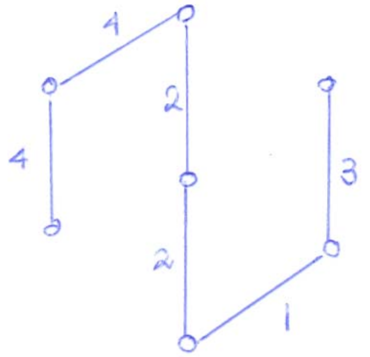


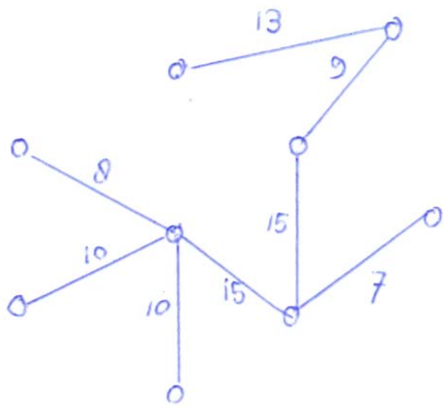
48. Geen circuits want je kunt een willekeurige lijn uit een circuit weglaten. De samenhang is noodzakelijk omdat je vanuit ieder punt elk ander punt wilt kunnen bereiken. Denk daarbij maar aan het telefoon netwerk.

49. Een samenhangende deelgraaf zonder cykels is een boom.

50. Er zijn 21 verschillende opspannende bomen.

51. Het minimum gewicht van een opspannende boom van de linkergraaf is 16 en de rechtergraaf heeft 87 als minimum gewicht van een opspannende boom.





52. De tweede graaf van links en de rechtergraaf zijn isomorf.

53. 12 + 1 – 4 = 9. De hoeveelheid stroom die uit de bron vertrekt moet gelijk zijn aan de hoeveelheid stroom die in de put aankomt.

54. De maximumstroomsterkte is gelijk aan 9.

55. Er zijn vier mogelijke snedes.

56. De maximum stroomsterkte is 3 + 2 + 1 = 6. De som van de stroomgetallen van de dikke pijlen is gelijk aan 2 + 2 + 2 + 1 =7. Als je het stroomgetal van de pijl die wel zijn kop maar niet zijn staart in U heeft, er af trekt, krijg je 7 – 1 = 6.

57. De lijnen van een snede zorgen voor de samenhang van een netwerk. Daarbij wordt de stroom via de lijnen van U^+ van bron naar put vervoerd, maar de lijnen van U^- vervoeren stroom weer terug van put naar bron.

58. Zet de stroomgetallen bij de lijnen van de graaf en gemakkelijk kun je controleren dat bij elke snede de bewering klopt.

59. Bij beide netwerken is de maximumstroomsterkte gelijk aan 6.

60 4, want als je meer dan vier lijnen tekent, heb je een cykel.

61. Als er drie componenten zouden zijn, kun je op zijn minst nog één lijn toevoegen waarna de graaf met één component minder toch nog steeds onsamenhangend zou zijn. Er zijn dus twee componenten.

62. Als een component geen volledige graaf zou zijn, kun je zoveel lijnen toevoegen dat hij dat wel is zonder dat de graaf samenhangend wordt.

63. De graaf heeft n punten en twee componenten, waarvan de ene k en de andere l punten heeft. Dus $k+l=n$.

64. Wanneer de ene component vier punten heeft en de andere één. In dat geval zijn er zes lijnen. De andere mogelijkheid geeft dan maar vier lijnen.

65. Dan heeft de ene component 99 lijnen en de andere component één.
Het getal Ext(100, samenhang) is dan gelijk aan $\dfrac{99 \cdot 98}{2} = 4851$.

66. Dat getal is $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$.

67. Ext(11, samenhang) = $\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 9 = 45$, dus als er 47 lijnen zijn is de graaf samenhangend. Dit geldt ook voor een graaf met 11 punten en 46 lijnen. Een onsamenhangende graaf met 45 lijnen krijg je door een volledige graaf op 10 punten te tekenen en het elfde punt met geen enkel ander punt te verbinden.

68. Omdat ze steeds bestaan uit dezelfde componenten: één los punt en een volldige graaf op de overige punten.

69. Ze hebben allemaal zes lijnen. Je kunt 11 verschillende grafen vinden.

70. Ze zijn niet-isomorf.

71. Ext(n, cykel) = n – 1.

72. Door een punt van de ene component te verbinden met een punt van de andere component kan geen cykel ontstaan, maar er komt op die manier wel een lijn bij. Het aantal lijnen van een onsamenhangend graaf zonder cykel is dus niet maximaal.

73. Een samenhangende graaf zonder cykels heet een boom.

74. Bij een graaf met drie punten zijn er maximaal 2 lijnen, bij een graaf met vier lijnen zijn er maximaal vier lijnen, bij een graaf met vijf punten zijn er maximaal zes lijnen en bij een graaf met zes punten zijn er maximaal negen lijnen.

75. Bij een graaf met twee punten moet je nog het getal één invullen.

76. Alle drie de grafen zijn tweedelingsgrafen.

77. Als een tweedelingsgraaf een driehoek zou hebben, dan zouden er twee punten van dezelfde groep punten met elkaar verbonden moeten zijn, wat niet het geval is.

78. De punten van zo'n cykel moeten om en om van groep 1 en groep 2 zijn, maar dan kom je niet uit.

79. Dan zijn er vijftien lijnen.

80. Je moet dan de punten in twee groepen van elk vier punten verdelen.

81. Als de graaf een even aantal punten heeft verdeel je de punten in twee even grote groepen en als het puntenaantal oneven is zorg je ervoor dat de ene groep één punt meer dan de andere groep heeft.

82. Als er in de ene groep $k+1$ punten en in de andere groep $l-1$ punten zijn, dan is het aantal lijnen $(k+1)(l-1) = k \cdot l + l - k - 1$. Er geldt dat $l > k$ dus $l \geq k+1$ zodat voor het aantal lijnen geldt: $(k+1)(l-1) \geq k \cdot l$ en het aantal lijnen wordt er dus niet kleiner op.

83. Stel dat de ene groep *x* punten heeft , dan heeft de andere groep er *n-x*.
Het aantal lijnen $l(x)$ is dan gelijk aan $x(n-x)$. De grootste waarde krijg je als neemt $x = \frac{1}{2}n$. Het aantal lijnen is dan $\frac{1}{2}n \cdot \frac{1}{2}n = \frac{1}{4}n^2$.

84. Het kleinste aantal punten is dan $\dfrac{n-1}{2}$ en het grootste aantal $\dfrac{n+1}{2}$.
Het aantal lijnen is gelijk aan $\dfrac{n-1}{2} \cdot \dfrac{n+1}{2} = \dfrac{n^2-1}{4} = \frac{1}{4}(n^2-1)$

85. Als *n* even is, dan is $\frac{1}{4}n^2$ een geheel getal, dus dan is $\left\lfloor \frac{1}{4}n^2 \right\rfloor = \frac{1}{4}n^2$.
Als *n* oneven is, dan kun je schrijven $n = 2k+1$ met *k* een geheel getal. Er geldt $\left\lfloor \frac{1}{4}n^2 \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{4}(2k+1)^2 \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{4}(4k^2+4k+1) \right\rfloor = \left\lfloor k^2+k+\frac{1}{4} \right\rfloor = k^2+k$ want k^2+k is een geheel getal. Verder is $k^2+k = k(k+1) = \dfrac{n-1}{2} \cdot \dfrac{n+1}{2} = \frac{1}{4}(n^2-1)$.

86. Ja, daar ging het over tweedelingsgrafen.

87. In dat geval zou de graaf G wel driehoeken bevatten.

88. Als alle lijnen het ene eindpunt in C en het andere eindpunt in B zouden hebben dan zou G een tweedelingsgraaf zijn, maar gegeven was dat dit niet zo is. Dus is er minstens één lijn met beide eindpunten in C.

89. Omdat er alleen maar lijnen bij gekomen zijn met het ene eindpunt in B en het andere eindpunt in C.

90. Kies een punt v_1 van verzameling C. Stel dit punt heeft graad *k*. Als punt v_0 graad *l* heeft dan geldt $l \geq k$. Bij de lijnen vanuit v_1 zijn misschien lijnen die moeten worden weggelaten omdat ze v_1 verbinden met een ander punt van verzameling *C*. Maar zelfs als ze alle *k* weggelaten zouden moeten worden, komen er minstens evenveel bij, want je moet v_1 verbinden met alle *l* punten van verzameling *B* en $l \geq k$.

91. Als het aantal lijnen dat je weglaat even groot is als het aantal lijnen dat je toevoegt.

92. De graaf *G** is een tweedelingsgraaf met een maximaal aantal lijnen, want elk punt van de verzameling *B* is verbonden met v_0 en is ook verbonden met elk punt van de verzameling C. Dus elke graaf zonder driehoeken met een maximaal aantal lijnen is een tweedelingsgraaf. Andere mogelijkheden zijn er niet, want als de grafen G* en G evenveel lijnen hebben, dan neemt de graad van punten in B niet toe. Elk punt in B is dan dus al verbonden met elk punt in C. C kan dus geen lijn opspannen.

93. Het aantal lijnen is maximaal als je een volledige tweedelingsgraaf hebt met twee groepen van 50 punten. Er zijn dan $50 \cdot 50 = 2500$ lijnen. Dus als er meer lijnen zijn dan dit aantal dan heeft de graaf één of meer driehoeken.