Oplossingen

1 a A ridder, B schurk.
b B schurk, A onbekend.

2 Zus schurk, persoon zelf onbekend.

3 a 'Liegt Arthur altijd?'
b 'Ben jij Arthur?'

4 Schurk.

5 3.

6 6.

7 De verdachte is onschuldig. (Hij is niet Arthur York, maar wel een schurk.)

8 De uitspraak op het gouden en die op het loden kistjes zeggen het tegenovergestelde, dus één van de twee is waar. Omdat hoogstens één uitspraak waar is, is de uitspraak op het zilveren kistje onwaar. Dus zit het portret in het zilveren kistje.

9 Als het portret in het loden kistje zat, dan zouden alle drie de uitspraken waar zijn, in tegenspraak met wat gegeven is. Als het portret in het zilveren kistje zat, dan zouden ze alle drie onwaar zijn. Dus het portret moet in het gouden kistje zitten. (Nu zijn de eerste twee uitspraken waar en de derde onwaar.)

10 a Het loden kistje is leeg, want als het portret hier in zat, waren beide uitspraken fout. De eerste uitspraken op het zilveren en gouden kistje komen overeen, dus ze zijn beide waar of beide onwaar. Als ze beiden onwaar zijn, zijn de tweede uitspraken beide waar, maar dat kan niet omdat ze elkaar tegenspreken. Dus de eerste uitspraken zijn allebei waar en het portret zit niet in het gouden kistje, dus zit het in het zilveren kistje.
b Als het portret in het gouden kistje zit, dan bevatten de deksels van het gouden en het zilveren kistje beide twee onware uitspraken. Als het portret in het zilveren kistje zit hebben het zilveren en het loden kistje beide één ware en één onware uitspraak. Dus het portret zit in het loden kistje.

11 a Stel dat het loden kistje was gemaakt door Bellini, dan zou de uitspraak waar zijn en dus de andere kistjes gemaakt zijn door Cellini. Dit betekent dat beide andere uitspraken onwaar zijn. In het bijzonder die op het zilveren kistje. Dus dan zit de dolk in het zilveren kistje. Stel dat het loden kistje was gemaakt door Cellini, dan zijn dus tenminste twee kistjes gemaakt door Bellini. Dit wil zeggen dat het zilveren en het gouden kistje door Bellini zijn gemaakt, en de uitspraken hierop beide juist zijn. In het bijzonder die op het gouden kistje. Dan ligt de dolk dus in het gouden kistje. In beide gevallen zit de dolk niet in het loden kistje, dus deze moet de aanbidder kiezen.
b Als het zilveren kistje een Bellini is, dan is de uitspraak waar en het gouden kistje dus van Cellini. Stel het zilveren kistje is een Cellini, dan is niet precies één van de twee een Bellini. Dus is het gouden kistje ook een Cellini.

Het gouden kistje is dus altijd een Cellini, en de uitspraak erop onwaar, dus het portret zit in het gouden kistje.
c We laten eerst zien dat het loden kistje een Bellini moet zijn. Stel dat het een Cellini was, dan is de uitspraak onwaar en moeten er tenminste twee Bellini's zijn; de gouden en de zilveren. Dit is onmogelijk omdat het portret niet in beide kistjes kan zitten. Dus het loden kistje is een Bellini. Dit betekent dat er tenminste twee Cellini's zijn; de zilveren en de gouden en het portret zit dus noch in het zilveren, noch in het gouden kistje. Dus zit het in het loden kistje. We hadden al bewezen dat het loden kistje een Bellini moest zijn, wat de tweede vraag beantwoordt.

12 'Ik krijg niet prijs B.'

13 C ziet een witte en een zwarte pet en kan dus niet weten welke pet hij zelf op heeft. Omdat C niets zegt, weet B dat zijn pet verschilt van A. B weet dus dat hij een witte pet op heeft.

14 Als de tweede en de derde wijze allebei een rode hoed op zouden hebben, zou de eerste wijze weten dat hij een zwarte hoed op had.
De tweede wijze hoort de eerste wijze zeggen dat deze niet weet wat voor hoed hij op heeft, dus weet die tweede wijze meteen dat hijzelf en de derde wijze niet allebei een rode hoed op kunnen hebben.
Nu gaat bij de tweede wijze de blinddoek af; zou hij zien dat de derde wijze een rode hoed op heeft, dan zou hij weten dat hijzelf een zwarte hoed op had en dat ook zeggen.
Maar hij zegt dat hij niet weet wat voor hij hoed op heeft. De derde wijze hoort dat en redeneert: ik heb blijkbaar geen rode hoed op, dus heb ik een zwarte hoed op.

15 Als Martijn gelijk heeft, moeten alle vier de uitspraken waar zijn en het is duidelijk dat dat niet kan. Martijn heeft daarom een zwart petje op. Als Marleen de waarheid sprak, zou zij als enige een wit petje hebben; in dat geval zou Karin de waarheid spreken, maar Marleen zegt juist dat Karin een zwart petje op heeft. Daar dit niet met elkaar te verenigen is, heeft Marleen gelogen, en ook zij heeft dus een zwart petje op. Hieruit volgt dat er tenminste twee zwarte petjes zijn zodat Folkert ook geen gelijk kan hebben. Karin ziet dus óf drie zwarte petjes óf vier zwarte petjes. Maar als ze vier zwarte petjes ziet, heeft ze gelogen want ze zegt dat ze er drie ziet en in dat geval moet ze zelf ook een zwart petje hebben. Dan zou Marleen toch gelijk hebben, maar we hebben gezien waarom dat niet het geval kan zijn. Karin spreekt dus de waarheid en de witte pet die zij ziet, moet dus van Anne-Marthe zijn.

16 a We verdelen de munten in drie groepen, twee bestaande uit 27 munten en een bestaande uit 26 munten. Eerst wegen we de 27 tegen 27 munten. Als de schaal in evenwicht is, zit de valse munt in de derde groep. En als de schaal niet in evenwicht is, zit de munt in de groep die het lichtste is. In elk geval is dus bekend in welke van de drie groepen de lichtste zit. Verdeel die groep weer zo goed mogelijk in drieën en herhaal deze procedure een aantal keren. Na de vierde weging is het aantal munten tot één gereduceerd en dit is dan ook de valse.
b Als we dezelfde procedure bij n munten doen, dan is duidelijk dat we de valse munt in k keer wegen kunnen vinden, waarbij k het kleinste natuurlijke getal is zodanig dat $3^k \geq n$.

Omdat je na elke weging op z'n hoogst twee derde van het aantal munten echt kunt verklaren, is er ook geen betere methode.

17 Leg op de ene schaal een witte en een rode en op de andere schaal de andere witte en een blauwe. Als de twee schalen in evenwicht zijn, dan kun je door de twee witte nog een keer te wegen, de zware en lichte er uit halen. Als de balans niet in evenwicht is, dan ligt op de zwaarste kant ook de zwaarste witte. Verwijder nu de witte gewichten en vervang de blauwe door de andere blauwe. Dit geeft samen met de vorige weging voldoende informatie om alle zware te bepalen.

18 Weeg eerst twee willekeurige gewichten tegen elkaar. Als de balans niet in evenwicht is, dan leggen we deze gewichten bij elkaar. Op de andere schaal leggen we nu 9 keer 2 gewichten zodat we aan het eind elk gewicht minstens één keer gewogen hebben. We weten dat er van die oorspronkelijke 2 gewichten één van aluminium en één van duraluminium is gemaakt. Als we er nu twee gewichten tegenover leggen en de schaal is in evenwicht, dan bevatten die twee ook precies één gewicht van aluminium en één van duraluminium. Als de schaal doorslaat, dan lagen er twee van dezelfde soort, en van welk soort kunnen we ook zien. Dus als de eerste weging niet in evenwicht was, dan kunnen we het aantal blokken aluminium bepalen in 10 keer wegen.
Als de weegschaal wel in evenwicht is bij de eerste keer wegen, dan groeperen we de overgebleven gewichten in paren en wegen elk paar ten opzichte van het eerste paar totdat de weegschaal niet meer in evenwicht is. Als dit nooit gebeurt, weten we dat alle blokken van aluminium zijn. Stel nu dat bij de k-de weging de balans niet meer in evenwicht is. En neem aan dat het k-de paar zwaarder is. (Als het k-de paar lichter is, gaat de redenering ook op, dan waren alle voorgaande blokken van aluminium.) Nu wegen we de twee blokken uit het k-de paar afzonderlijk tegen elkaar. Nu weten we de soort van beide gewichten en we kunnen een paar blokken uit de al gewogen blokken selecteren, zodat er één van aluminium en één van duraluminium is. Met behulp van dit paar kunnen we, net zo als in het eerste geval, het aantal aluminium gewichten van het restant bepalen. Er zijn dan nog $18 - 2 \times k$ gewichten over, hiervoor hebben we $9 - k$ wegingen nodig. We hebben al $1 + k + 1$ wegingen achter de rug. Samen geeft dit in 11 keer wegen het aantal blokken aluminium.

19 We verdelen de munten in drie groepen van elk vier munten. Bij de eerste keer wegen leggen we een groep van vier op beide schalen. Nu zijn er twee gevallen:
– De schalen zijn in evenwicht.
– De ene schaal is zwaarder dan de andere.

– In evenwicht
In dit geval zit de valse munt in de groep die naast de weegschaal ligt. Noem deze munten 1, 2, 3 en 4. Nu leggen we de munten 1, 2 en 3 aan de ene kant van de weegschaal en plaatsen 3 zuivere munten aan de andere kant. Nu zijn er weer twee mogelijkheden:
i De schalen zijn in evenwicht. In dit geval is munt 4 vals en met een weging ten opzichte van een zuivere kan worden bepaald of deze zwaarder of lichter is dan de rest.

ii De ene schaal is zwaarder. Dan is de valse munt 1, 2 of 3. Verder weten we of de valse munt zwaarder of lichter is. Nu wegen we 1 ten opzichte van 2. Hieruit kunnen we bepalen welke de valse is.

– Niet in evenwicht
Nu zijn de munten die niet hebben deelgenomen aan de weging, zuiver. Noem de vier munten die op de zware schaal liggen 1, 2, 3 en 4. En noem de munten die op de lichtere schaal liggen 1′, 2′, 3′ en 4′. Nu leggen we 1, 2, en 1′ op de ene schaal en 3, 4 en 2′ op de andere. Dit geeft verschillende mogelijkheden:
i De weegschaal is in evenwicht. In dit geval is de valse munt 3′ of 4′. Als we in de derde weging 3′ tegen 4′ wegen, weten we welke de valse munt is, en de valse munt is lichter.
ii De schaal die 1, 2 en 1′ bevat is zwaarder. Dan zijn de munten 3, 4 en 1′ zuiver. Dus de valse munt is 1, 2 of 2′. Door nu 1 te vergelijken met 2 weten we welke de valse munt is.
iii De schaal met 2, 4 en 2′ is zwaarder, dan zijn 1, 2 en 2′ in ieder geval zuiver. De mogelijke valse munten zijn dus 1′, 3 en 4. Door 3 te vergelijken met 4 weten we welke de valse is.

20 Merk eerst op dat alle tandwielen óf een even óf een oneven aantal grammen wegen. Want als je er willekeurig één uitneemt, dan weegt het restant een even aantal grammen, dus een gewicht is even dan en slechts dan als het totale gewicht even is. Aangezien het niet uitmaakt welk tandwiel je eruit haalt zijn alle gewichten even of alle gewichten oneven.
Neem nu aan dat er 13 tandwielen bestaan, niet allemaal even zwaar, die aan de voorwaarde voldoen. En kies ze zo dat het totale gewicht minimaal is en elk gewicht nul of meer gram weegt. Als je 13 gewichten hebt, dan kun je van elk gewicht het gewicht van het lichste gewicht aftrekken, dan houd je 13 nieuwe gewichten over, waarvan er minstens één nul is (het lichste gewicht) en die verder ook weer aan de voorwaarde voldoet. Volgens de opmerking hierboven zijn nu alle gewichten even (0 is even). Maar nu kun je alle gewichten door twee delen zonder de voorwaarden geweld aan te doen, maar dit is in tegenspraak met de aanname dat het totale gewicht minimaal is. (We namen aan dat niet alle gewichten even zwaar waren, en als je dus door twee deelt neemt het totale gewicht dus echt af.)

21 Laat de helft van de 128 personen (dus 64) in de controlekamer plaats nemen en de andere helft daarbuiten, maar laat ze nog niet vrij. Controleer met het apparaat of er een wapen in de controlekamer is. Zo ja, laat dan de tweede groep mensen vrij en ga door met de eerste groep. Zo niet, laat dan de groep in de controlekamer vrij en ga dan door met de mensen uit de tweede groep. Er zijn, hoe dan ook, 64 personen overgebleven. Deel die groep weer in twee gelijke delen (elk 32) en plaats een van die groepen in de controlekamer. Na de controle kunnen weer 32 personen vertrekken terwijl de andere 32 nog moeten blijven. Zo komen er nog 5 controles voordat we de terrorist kunnen aanwijzen. Het totaal aantal controles is dus 7.

22 Kies eerst 9 kippen, die hebben 18 poten. Dat zijn er dus 12 te weinig. Voor elke kip die in een koe 'verandert' komen er 2 poten bij. Er moeten dus 6 kippen in koeien veranderen. Op de kinderboerderij zijn dus 3 kippen en 6 koeien.

23 21. Iedereen kreeg er 2, behalve de oudste, hij kreeg er één.

24 Schrijf het oorspronkelijke getal als $...a_4a_3a_2a_12$. Het nieuwe getal eindigt dan op $...a_4a_3a_2a_1$. Omdat het nieuwe getal het dubbele is van het oude getal, zien we dat $a_1 = 4$. Dit geeft dat het oorspronkelijke getal eindigt op $...a_4a_3a_242$ en het nieuwe op $...a_4a_3a_24$. Met dezelfde redenering als hiervoor zien we dat $a_2 = 8$. Hierna zien we dat $a_3 = 6$. Dit proces herhalen we totdat er een keer een twee optreedt en het nieuwe getal inderdaad het dubbele is van het oorspronkelijke getal. Het kleinste antwoord is 105263157894736842.

25 a 625 voldoet; om alle getallen te vinden volgen we de volgende redenering. Laat het gezochte gehele getal uit $k + 1$ cijfers bestaan. Het kan geschreven worden in de vorm $6 \times 10^k + y$ met y een k-cijferig getal (y kan beginnen met één of meer nullen). De condities van het probleem worden gegeven door $6 \times 10^k + y = 25y$, ofwel $y = (6 \times 10^k)/24$.
Duidelijk is dat $k \geq 2$ moet zijn, omdat 60 niet deelbaar is door 24 en y een geheel getal is. Voor $k \geq 2$ is y gelijk aan $25 \times 10^{k-2}$, dat wil zeggen dat y van de vorm 250...0 met $k - 2$ nullen. Dus alle gezochte getallen zijn van de vorm 6250...0 met n nullen en $n = 0, 1, 2, ...$
b Zoals in de oplossing van a hebben we nu de volgende vergelijking $y = (a \times 10^k)/34$, met y een geheel getal. Maar de rechterkant van deze vergelijking kan geen geheel getal zijn als $a \leq 9$ en $k \geq 1$.

26 Laat van het getal x het laatste cijfer z zijn. Dan $x = 10y + z$, $1 \leq y$ en $0 \leq z \leq 9$. Als het laatste cijfer van x wordt weggelaten, is het nieuwe getal gelijk aan y. Dus de conditie van het probleem geeft de vergelijking:

$$10y + z = a \times y$$

Hieruit volgt dat

$$z = (a - 10)y$$

Er geldt $a \times y = 10y + z \geq 10y$, dus $a \geq 10$. Ook geldt dat $19 \geq a$, want $1 \leq y$ en $0 \leq z \leq 9$.

Hier zijn alle oplossingen:

a	y	z	x
10	willekeurig positief getal	0	willekeurig getal met 0 als laatste cijfer
11	1, 2, ..., 9	$z = y$	11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99
12	1, 2, 3, 4	$z = 2y$	12, 24, 36, 48
13	1, 2, 3	$z = 3y$	13, 26, 39
14	1, 2	$z = 4y$	14, 28
15	1	$z = 5y$	15
16	1	$z = 6y$	16
17	1	$z = 7y$	17
18	1	$z = 8y$	18
19	1	$z = 9y$	19

27 Het laatste cijfer moet kleiner zijn dan 5, want $5^3 = 125 > 99$. Als het laatste cijfer een 4 is, dan is $4^3 = 64$ dus is het eerste cijfer groter of gelijk aan 6. Dit impliceert dat het getal groter of gelijk is aan $6^2 + 4^3 = 100 > 99$. Als het laatste cijfer een 3 is dan krijg je de vergelijking $3^3 + a^2 = 10a + 3$. Herleiden we deze vergelijking op nul, dus $a^2 - 10a + 24 = 0$. Maar $a^2 - 10a + 24 = (a - 4)(a - 6)$, dus $a = 4$ of $a = 6$.
Als het laatste cijfer een 2 is, dan wordt de vergelijking $2^3 + a^2 = 10a + 2$ ofwel $a^2 - 10a + 6 = 0$. Dit heeft geen gehele oplossing.
Als het laatste cijfer een 1 is, dan krijgen we $1^3 + a^2 = 10a + 1$ ofwel $a^2 - 10a = 0$, dan $a = 0$ of $a = 10$.
Merk op dat a het eerste cijfer van het gezochte getal voorstelt, en dus mag a geen 10 zijn. Als het laatste cijfer een 0 is, dan is $0^3 + a^2 = 10a + 0$ en dit geeft weer $a = 0$ of $a = 10$. Alle oplossingen zijn dus: 43, 63, 1, 0.

28 Het getal is deelbaar door 2, want anders zouden de kinderen die zeiden dat het getal door 2, 4, 6, 8, 10, enz. deelbaar was het allemaal fout hebben. Om een zelfde reden moet het getal ook deelbaar zijn door 3, en ook door 4, 5, 6, 7, 8, 9 en 10. Als het niet deelbaar zou zijn door 11, dan zouden kind 11 en kind 22 het fout hebben. Dat zijn weliswaar 2 kinderen, maar die kwamen niet vlak achter elkaar. Dus het getal is ook deelbaar door 11. Om soortgelijke redenen moet het getal ook deelbaar zijn door 12, 13, 14 en 15. De volgende twee getallen 16 en 17 voldoen met elkaar aan alle voorwaarden: ze komen na elkaar en een getal kan deelbaar zijn door 2 t/m 15 en door 18 t/m 31 zonder dat het deelbaar hoeft te zijn door 16 en 17.

29 Neem aan dat n het aantal schelpen is dat iedereen de volgende ochtend kreeg. Dan waren er die ochtend, voor het verdelen, dus $3n + 1$ schelpen. Dit aantal is gelijk aan de hoeveelheid schelpen in de twee stapeltjes die de vrouw samenvoegde. De vrouw pakte er 's nachts dus $(3n + 1)/2$. Er waren dus $3 \times (3n + 1)/2 + 1 = (9n + 5)/2$ schelpen voordat de vrouw ze verdeelde. Voordat de man ze verdeelde was het aantal schelpen dus nog:

$$3 \times \frac{9n+5}{2 \times 2} + 1 = \frac{27n+19}{4}$$

Het aantal dat Anne-Marthe aantrof was dus:

$$3 \times \frac{27n+19}{2 \times 4} + 1 = \frac{81n+65}{8}$$

De kleinste n waarvoor dit geheel is, is $n = 7$. Er waren dus $632/8 = 79$ schelpen.

30 Neem aan dat n het aantal kokosnoten is dat iedereen de volgende ochtend krijgt. Dan was het totale aantal kokosnoten die ochtend $5n + 1$. De laatste persoon die die nacht nog kokosnoten heeft verstopt moet er dan $(5n + 1)/4$ gepakt hebben. Daarvoor lagen er dus nog $5 \times (5n + 1)/4 + 1 = (25n + 9)/4$ noten. De een na laatste heeft dus $(25n + 9)/(4 \times 4)$ noten gepakt en het aantal noten dat hij aantrof was dus:

$$5 \times \frac{1}{4} \times \frac{25n+9}{4} + 1 = \frac{125n+61}{16}$$

De persoon hiervoor pakte er $(125n + 61)/(16 \times 4)$ en vond er:

$$5 \times \frac{1}{4} \times \frac{125n+61}{16} + 1 = \frac{625n+369}{64}$$

De tweede persoon verstopte er $(625n + 369)/(64 \times 4)$ en er lagen er dus:

$$5 \times \frac{1}{4} \times \frac{625n+369}{64} + 1 = \frac{3125n+2101}{256}$$

De allereerste man pakte er dus $(3125n + 2101)/(256 \times 4)$. Het aantal kokosnoten in die oorspronkelijke stapel was dus:

$$N = 5 \times \frac{1}{4} \times \frac{3125n+2101}{256} + 1 = \frac{15625n+11529}{1024} = 15n + 11 + \frac{265n+265}{1024}$$

Omdat N een geheel getal is moet 1024 een deler zijn van $265(n + 1)$. Omdat 1024 en 265 grootste gemene deler 1 hebben is n minimaal 1023. Hieruit volgt dat $N = 15 \times 1023 + 11 + 265 = 15621$.

31 Als n het aantal verkochte schapen is, dan kregen de broers dus n^2 gulden. Merk nu op dat alle kwadraten eindigen op 00, 01, 04, 09, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 21, 44, 69, 96, 56, 89, 24, 61, 41, 84, 29 of 76. Omdat de jongste broer aan de beurt was moet het een oneven tiental zijn, dus dan liggen er nog 6 guldens. Als de jongste broer die gepakt heeft, heeft de oudste broer 4 guldens meer dan de jongste. Het zakmes was daarom 2 gulden waard.

32 Stel dat mijnheer A geboren is in het jaar $19ab$, dan is zijn leeftijd dus $97 - 10a - b$ of $97 - 10a - b - 1$. In het eerste geval als mijnheer A jarig is op 1 januari, in het tweede geval als mijnheer A nog jarig moet worden. Het gegeven dat zijn leeftijd $1 + 9 + a + b$ is leidt tot de volgende vergelijkingen.

$87 = 11a + 2b$	als mijnheer A op 1 januari jarig is
$86 = 11a + 2b$	als mijnheer A niet jarig is

Maar de tweede vergelijking heeft geen oplossing met gehele getallen kleiner dan 10. De eerste vergelijking heeft één oplossing met a en b kleiner dan 10, namelijk $a = 7$ en $b = 5$. Mijnheer A is dus 22 jaar.

33 Neem het kleinste gemene veelvoud van 6, 7, 8 en 10. Dit is 840. Het gevraagde aantal is $840 + 3 = 843$.

34 Als je bij dat getal 1 optelt wordt het deelbaar door 5, 6, 7, 8 en 9. Het kleinste gemene veelvoud van die getallen is 7560. Het oorspronkelijke getal zou dus kunnen zijn $7560 - 1$, $2 \times 7560 - 1$, $3 \times 7560 - 1$, maar alleen $7560 - 1 = 7559$ heeft vier cijfers; de anderen hebben er meer.

35
a Is waar.
b Is niet waar, want 12 is wel deelbaar door 4 en 6, maar niet door 24.
c Is niet waar, zie bijv. 36.
d Is waar.

36 a Stel het getal heeft drie cijfers xyz. Dan is het getal gelijk aan $100x + 10y + z = 99x + 9y + (x + y + z)$. 9 en 99 zijn deelbaar door 3, dus ook $99x + 9y$. Als $100x + 10y + z$ deelbaar is door 3, dan is ook $x + y + z$ deelbaar door 3 en omgekeerd. Als het getal meer dan drie cijfers heeft, dan kan eenzelfde bewijs worden opgeschreven, omdat elk getal dat uit uitsluitend negens bestaat, deelbaar is door 3.
b Op dezelfde manier als a.
c Op dezelfde manier als bij a kun je zien dat als je een getal door 3 deelt, de rest precies hetzelfde is als je $x + y + z$ – dat is, de som van zijn cijfers – door 3 deelt.

37 a Van drie opeenvolgende getallen is er altijd één deelbaar door 3 en ook altijd minstens één deelbaar door 2. Dus is het produkt deelbaar door 6.
b Bij vier opeenvolgende getallen is er altijd één deelbaar door 4. Verder is er nog eentje deelbaar door 2 en er is nog een getal deelbaar door 3. Samen geeft dit dat het produkt deelbaar is door 24.

38 a De som van k, $k + 1$ en $k + 2$ is $3k + 3$ en dus deelbaar door 3.
b Van vier opeenvolgende getallen zijn er twee even en twee oneven. De som van een even aantal oneven getallen is even. Dus de som van vier opeenvolgende getallen is deelbaar door 2.
c Geef de som van de getallen k tot en met $k + n - 1$ aan met S, dan zie je dat:

$$\begin{array}{lllllll}
S = & k & +(k+1) & +(k+2) & +(k+3) & +\ldots+(k+n-1) & \\
S = & (k+n-1) & +(k+n-2) & +(k+n-3) & +(k+n-4) & +\ldots+k & \\
\hline
2S = & (2k+n-1) & +(2k+n-1) & +(2k+n-1) & +(2k+n-1) & +\ldots+(2k+n-1) & +
\end{array}$$

$2S = n \times (2k + n - 1)$
$S = n(2k + n - 1)/2$

Hieraan kun je meteen zien dat de som deelbaar is door n, want $(2k + n - 1)$ is even als n oneven is.
d De som $S = n(2k + n - 1)/2$ is deelbaar is door $n/2$. Als je de som door n deelt, krijg je $(2k + n - 1)/2$. Dit is geen geheel getal, want $(2k + n - 1)$ is oneven als n even is. Dus is de som niet deelbaar door n.

39 a Elk getal is te schrijven als $3k + r$, waarbij we $r = 0$ of $r = 1$ of $r = 2$ mogen veronderstellen. Nu is $(3k + r)^2 = 9k^2 + 6kr + r^2$ en dit geeft bij deling door 3 rest r^2. We hoeven dus alleen maar naar de resten van de kwadraten tussen 0 en 2 te kijken.
$0^2 = 0$ heeft rest 0
$1^2 = 1$ heeft rest 1
$2^2 = 4$ heeft rest 1
b 0 of 1.
c 0, 1 of 4.

40 Als we een kwadraat door 3 delen, is de rest 0 of 1 (zie vorige opdracht). Maar dan moet je volgens opdracht 36c dezelfde rest – dus 0 of 1 – krijgen als je de som van de cijfers door 3 deelt. Maar als je 5 of 1994 door 3 deelt, is de rest 2. Dus is er geen kwadraat waarvan de som van de cijfers 5 of 1994 is.

41 Stel x en y geheel, $x + y = 50$. Dan $x^2 = (50 - y)^2 = 2500 - 100y + y^2$.
Maar $2500 - 100y$ is een veelvoud van 100, dus x^2 eindigt op dezelfde cijfers als y^2.

42 Voor alle positieve gehele getallen hebben we de volgende ongelijkheden:

$$n^2 < n^2 + n + 1 < n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$$

Hieruit volgt dat voor alle positieve gehele getallen $n^2 + n + 1$ geen kwadraat is.

43 Elk oneven getal is te schrijven als $2k + 1$, en $(k + 1)^2 - k^2 = 2k + 1$.

44 Merk op dat $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$. Als het verschil van a en b minstens twee is, dan staat hier dus een ontbinding van het verschil van de kwadraten.

45 a $(1 + 10) + (2 + 9) + (3 + 8) + (4 + 7) + (5 + 6) = 11 + 11 + 11 + 11 + 11 = 55$
b $(1 + 199) + (3 + 197) + (5 + 195) + \ldots + (99 + 101) = 200 \times 50 = 10000$

46

1^3	$= 1$	$= 1$	$= 1^2$
$1^3 + 2^3$	$= 1 + 8$	$= 9$	$= 3^2$
$1^3 + 2^3 + 3^3$	$= 1 + 8 + 27$	$= 36$	$= 6^2$
$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$	$= 1 + 8 + 27 + 64$	$= 100$	$= 10^2$
$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3$	$= 1 + 8 + 27 + 64 + 125$	$= 225$	$= 15^2$

In het algemeen zullen wij de volgende formule bewijzen.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Stel dat voor $n = k$ deze formule geldt. Dan volgt:

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 &= \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 + (k+1)^3 \\ &= (k+1)^2\left(\frac{k^2}{4} + k + 1\right) \\ &= (k+1)^2\left(\frac{k^2 + 4k + 4}{4}\right) \\ &= \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Dus de formule geldt voor $n = k + 1$ ook. Omdat de formule waar is voor $n = 1$, is deze nu waar voor alle $n \geq 1$.

47 Kijk naar de eerste 4 getallen in een rij, dan ontstaat het volgende patroon (O = oneven en E = even getal).

								O	E	E	E
							O	O	O	E	
						O	E	O	E		
					O	O	E	O			
				O	E	E	E				
			O	O	O	E					
		O	E	O	E						
	O	O	E	O							
O	E	E	E								

Een rijtje hangt alleen af van het rijtje erboven, daarom herhaalt het patroon zich.

48 In boom C.

49 In boom C of E.

50 Nee, want er is bij elke boom een even aantal sporen.

51 Nee, want 1989×101 is oneven. Maar 1989×101 is het aantal eindpunten van de telefoonlijnen, dat is twee maal het aantal lijnen, dus het moet even zijn.

52 Omdat $1 + 2 + 6 + 4 + 7 + 7 + 5 + 3 = 35$ oneven is.

53 Het antwoord is ja. Er zijn n personen in het gezelschap, en laten wij veronderstellen dat zij elkaar begroeten door een hand te geven.
i Als er iemand is die niemand een hand gaf, dan gaf iedereen zijn hand aan ten hoogste $n - 2$ anderen. Dus het aantal gegeven handen kan het volgende zijn: 0; 1; 2; ...; $n - 2$. Dit zijn $n - 1$ mogelijkheden. Er zijn n mensen, dus er moeten er wel twee zijn, die evenveel keer een hand hebben gegeven.
ii Als iedereen een hand gaf aan iemand anders, dan zijn de aantallen van de mogelijke gegeven handen: 1; 2; 3; ...; $n - 1$. Dit zijn ook $n - 1$ mogelijkheden. Dus onze bewering is ook in dit geval waar.

54 a Neem een stad A in gedachten. Vanuit deze stad vliegen de twee maatschappijen naar 5 andere steden. Er is een maatschappij M die naar minstens drie verschillende steden vliegt, zeg B, C en D. Als tussen twee van die drie steden een verbinding wordt onderhouden door deze maatschappij, dan vormt A tezamen met deze twee steden een driehoek. Als tussen de steden B, C en D geen enkele verbinding wordt onderhouden door M dan vormen B, C en D een driehoek voor de andere maatschappij.
b We weten dat er minstens één driehoek in zit. Probeer nu zolang mogelijk het tegendeel vol te houden. Een andere methode is gebaseerd op tellen. Noem een driehoek fout als er tussen de driehoekpunten allebei de maatschappijen vliegen. Er zijn in totaal $(6 \times 5 \times 4)/(3 \times 2 \times 1) = 20$ driehoeken. Een driehoek is bepaald door een hoekpunt en de twee lijnen die uit dat hoekpunt vertrekken. Nu gaan we in een bepaald hoekpunt kijken, zeg A. Stel nu dat er r lijnen van maatschappij M en s vluchten van maatschappij N zijn die uit A vertrekken ($r + s = 5$). Dan zijn er $r \times s$ foute driehoeken waarbij vanuit A twee verschillende maatschappijen vliegen. Dit aantal is 0×5, 1×4 of 2×3. In het bijzonder is dit maximaal 6. Er zijn dus in

het totaal maximaal $6 \times 6 = 36$ foute driehoeken. Maar elke foute driehoek hebben we dubbel geteld. Dus zijn er in totaal maximaal 18 verschillende foute driehoeken. En er zijn dus minstens $20 - 18 = 2$ goede driehoeken.

c Vanuit één stad worden door 3 maatschappijen 16 verbindingen onderhouden. Je kunt dus een maatschappij M aanwijzen die naar minstens 6 verschillende steden vliegt. Neem deze steden apart. Als er tussen deze steden een vlucht wordt onderhouden door maatschappij M dan hebben we een driehoek. Als geen vlucht tussen deze steden wordt onderhouden door maatschappij M dan hebben we 6 steden waartussen twee maatschappijen vliegen, volgens onderdeel a is er dan ook een driehoek.

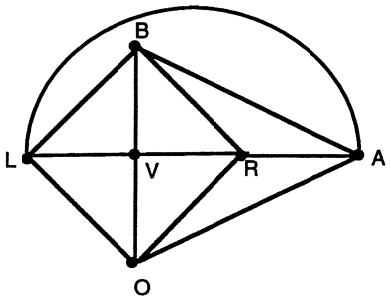
d We gebruiken dezelfde strategie als bij onderdeel c. Kies een planeet, vandaar uit is er dus minstens één maatschappij die naar 109602 planeten vliegt ($986410/9 = 109601\frac{1}{9}$). We mogen veronderstellen dat deze maatschappij niet tussen een tweetal van de 109602 planeten vliegt. Dus we hebben een nieuw probleem, gegeven 109602 planeten en 8 maatschappijen, is er dan altijd een driehoek? Deze reductie stap herhalen we nog een aantal keer:

aantal mij'en	*aantal steden*
9	986410
8	109602
7	13701
6	1958
5	327
4	66
3	17
2	6

En dit laatste geval is al in a bewezen.

55 Oorspronkelijk waren er $(100 \times 99)/2 = 50 \times 99$ verbindingen. Neem maar een stad als hoofdstad, en laat alleen de verbindingen tussen die stad en alle andere steden blijven. Er zijn nu 99 verbindingen, en van elk stad kan men via de hoofdstad elke andere stad bereiken. Minder verbindingen zijn zeker niet voldoende, want met n verbindingen kunnen hoogstens $n + 1$ steden verbonden worden. Dus maximaal $49 \times 99 = 4851$ verbindingen kunnen worden opgeheven.

56 De kubus kan worden voorgesteld door een graaf, elk zijvlak is een punt van de graaf en 2 zijvlakken die een ribbe gemeenschappelijk hebben, worden in de graaf verbonden. De 6 punten noemen we V(oor), B(oven), O(nder), L(inks), R(echts) en A(chter). Je kunt zorgen dat de kubus zo gedraaid wordt dat 1 in L en 2 in B valt.



We kunnen dan het volgende overzicht maken:

1	2	3	4	5	6
L	B	V	R	A	O
				O	A
			O	R	A
		A	O	R	V
			R	O	V
				V	O
		R	A	O	V
				V	O

O loopt dood want AV strookt niet met 56.

57 a $10 + 40 + 1 = 51$
b $10 + 20 + 1 = 31$
c $2 + 2 + 2 + 1 = 7$
d $10 + 12 + 12 + 1 = 35$
e $40 + 20 + 1 = 61$

58 $30 + 30 + 2 = 62$

59 9

60 a $8 \times 3 + 1 = 25$
b Als in elke horizontale rij 3 pionnen staan, dan zijn er 24 pionnen. Dus bij 25 pionnen er is er ten minste één horizontale rij waarin ten minste 4 pionnen staan. De 24 pionnen kunnen op de manier zoals hiernaast afgebeeld, geplaatst worden. Dan staan in elke rij en elke kolom 3 pionnen.

X	X	X					
			X	X	X		
					X	X	X
		X	X	X			
X	X					X	
					X	X	X
			X	X			X
X	X	X					

61 a $15 + 10 + 15 + 1 = 41$
b $20 + 30 + 15 + 1 = 66$
c $30 + 30 + 10 + 1 = 71$
d $15 + 10 + 15 + 3 = 43$
e $17 + 12 + 17 + 1 = 47$

62 Laten we aannemen dat de gegeven getallen zijn: $a_1 < a_2 < \ldots < a_{20}$.
Als er in de rij $a_2 - a_1, a_3 - a_2, \ldots, a_{20} - a_{19}$ geen verschil is dat ten minste 4 keer voorkomt, dan is:

$$a_{20} - a_1 = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \ldots + (a_{20} - a_{19}) \geq 3(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) + 7 = 70$$

Maar dat is in tegenspraak met wat we verondersteld hebben.

63 Ja, want $32 > 31$.

64 a 5, want $4 \times 31 = 124$, maar $5 \times 31 = 155 > 150$.
b Nee.

65 Verdeel het jaar in 5-daagse perioden. $365/5 = 73$, dus hebben we 73 perioden. Als twee kinderen in één periode hun verjaardag hebben, dan zijn er maximaal 3 dagen tussen de twee verjaardagen. Dus als er $73 \times 2 + 1 = 147$ kinderen zijn, dan is het zeker dat in één van de perioden minstens 3 kinderen jarig zijn, dus zijn er zeker 3 leerlingen met verjaardagen waar maximaal 3 dagen tussen zitten. Het is niet waar voor 146 of minder leerlingen: als op de 1-ste, 6-de, 11-de, ..., 361-ste dagen van de jaar precies twee leerlingen jarig zijn, dan zijn er 146 leerlingen, maar geen drie hebben verjaardagen waar maximaal 3 dagen tussen zitten.

66 Van onder naar boven zetten we op elk veld het aantal manieren waarop de koning daar kan komen.
De som van de aantallen op de bovenste rij is $25 + 44 + 51 + 45 + 30 + 14 = 209$.

25	44	51	45	30	14
9	16	19	16	10	4
3	6	7	6	3	1
1	2	3	2	1	
	1	1	1		
		X			

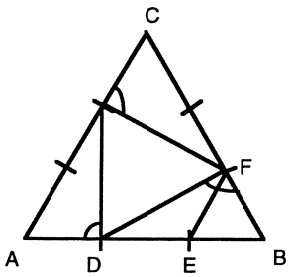
67 We moeten in totaal 5 verbindingslijnstukken tekenen. Er mogen 3 verschillende soorten verbindingslijnstukken zijn:
i lijnstukken die een punt met een buur (aanliggende punt) verbinden;
ii lijnstukken die een punt met een derde buur verbinden;
iii lijnstukken die punt met een vijfde buur verbinden.
We moeten in totaal 5 verbindingslijnstukken tekenen. Van de tweede soort mogen er hoogstens 2, van de derde soort mag hoogstens 1 lijnstuk zijn. Het volgende overzicht maakt duidelijk dat er 6 verschillende mogelijkheden zijn wat de soorten van de lijnstukken betreft. Onder de kolommen is gegeven hoeveel manieren de verschillende lijnstukken getekend kunnen worden tussen de gegeven punten.

i	5	4	4	3	3	2
ii	0	1	0	2	1	2
iii	0	0	1	0	1	1
mogelijkheden	2	10	5	10	10	5

Dus het totaal aantal mogelijkheden is $2 + 10 + 5 + 10 + 10 + 5 = 42$.

68 Terwijl Euphemia peinzend naar de rij van 24 eentjes keek dacht ze plotseling: 'Je kunt de rij overal waar je wilt onderbreken.' In plaats van: 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 kan men bijvoorbeeld schrijven (de onderbrekingen worden aangegeven door komma's) 1, 1 + 1, 1 + 1 + 1 + 1, 1 + 1 = 1 + 2 + 4 + 2 of: 1 + 1 + 1 + 1 + 1, 1 + 1 + 1, 1 = 5 + 3 + 1 en ineens begreep ze dat het aantal manieren waarop men 24 enen kan onderbreken gelijk is aan het aantal manieren waarop men het getal 24 kan samenstellen. Nu zijn er 23 plaatsen waarop de rij onderbroken kan worden. Bij de eerste plaats waar dat mogelijk is kan men al dan niet onderbreken; dat zijn twee mogelijkheden: ja en nee, J en N. Beide worden gecombineerd met de twee mogelijkheden om al dan niet een onderbreking op de tweede plaats aan te brengen: JJ, JN, NJ, NN. Deze vier mogelijkheden worden gecombineerd met de twee mogelijkheden om al dan niet een onderbreking op de derde plaats aan te brengen: JJJ, JNJ, NJJ, NNJ, JJN, JNN, NJN, NNN. Deze acht mogelijkheden worden dan weer gecombineerd enz. Het is nu duidelijk dat het totale aantal mogelijkheden gelijk is aan $2 \times 2 \times 2 \times \ldots$ en dat 23 keer, dat wil zeggen $2^{23} = 8388608$. Euphemia moet 11 cent per manier vragen, dan erft ze *f* 922.746,88. Als ze 12 cent vraagt is dat net teveel, want dan wordt het $2^{23} \times 12$ cent = *f* 1.006.632,96.

69 EB = BF en hoek EBF = 60°, dus EF = EB = BF en hoek EFB = hoek FEB = 60°. Maar DE = EB, dus DE = EF en hoek FDE = hoek DFE = 1/2 hoek FED = 30°.
En hoek DFB = hoek DFE + hoek EFB = 30° + 60° = 90°. Op de zelfde manier kan gezien worden dat de andere twee aangegeven hoeken ook 90° zijn.



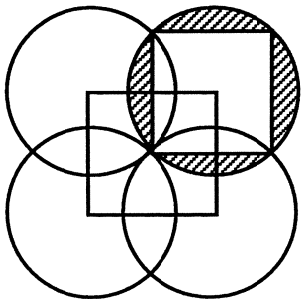
70 In de driehoek CEF is de hoek CEF 90° en de hoek ECF 45°. De hoek EFC is dus 180° – 90° – 45° = 45°. Hoek ECF = hoek EFC, dus de zijde EF is gelijk aan de zijde EC. Teken nu een hulplijn AF. De driehoek AEF en de driehoek ABF zijn congruent, want zijde AE = zijde AB, zijde AF = zijde AF en de hoeken AEF en ABF zijn allebei recht. Dus is zijde EF gelijk aan zijde BF.

71 Noem de middelpunten van de vier kleine cirkels A, B, C en D, en de raakpunten van de grote cirkel met elk van de kleine cirkels A', B', C' en D'. ABCD is een vierkant met zijden 2 en diagonalen $2\sqrt{2}$. De diameter van de grote cirkel is de lengte van het lijnstuk A'C' = A'A + diagonaal AC + CC' = $1 + 2\sqrt{2} + 1 = 2 + 2\sqrt{2}$. De straal is de helft van de diameter dus $1 + \sqrt{2}$.

72 Het midden van het lijnstuk AB noemen we C en het middelpunt van de twee cirkels M. De driehoek MCA heeft een rechte hoek in C, dus mogen we er de stelling van Pythagoras op toepassen: $AC^2 = MA^2 - MC^2$, dus $AC^2 = AB^2/4 = 100$. Dus:

oppervlakte van het gebied tussen de cirkels
= oppervlakte van de buitencirkel – oppervlakte van de binnencirkel
$= \pi \times MA^2 - \pi \times MC^2 = \pi \times (MA^2 - MC^2) = \pi \times AC^2 = 100\pi$

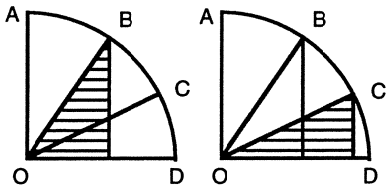
73 Elke 'propeller' heeft lengte a, en is dus even lang als de zijde van een vierkant. Teken nu een nieuw vierkant met zijde a volgens de figuur.
De straal van de cirkels is $a/\sqrt{2}$, en hun oppervlakte is dus $\pi a^2/2$. De oppervlakte van het nieuwe vierkant is a^2. Het gebied binnen de cirkel maar buiten het nieuwe vierkant bestaat uit vier propellerhelften en heeft oppervlakte $(\pi/2 - 1) \times a^2$, dit is gelijk aan de oppervlakte van vier propellerhelften. De totale propeller oppervlak is twee keer zo groot en dus $(\pi - 2) \times a^2$.



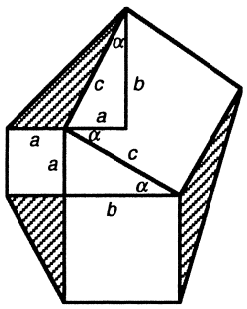
74 1/6.

75 opp(ACD) – opp(DPC) = opp(BCD) – opp(DPC), want opp(ACD) = opp(BCD).

76 Omdat de twee gearceerde oppervlaktes even groot zijn.

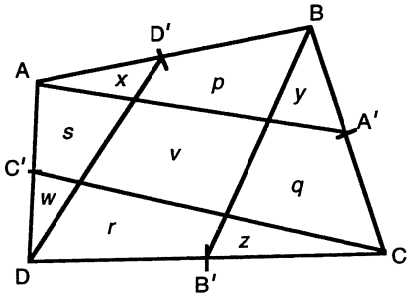


77 Alle drie driehoeken hebben dezelfde oppervlakte als de niet-gearceerde driehoek in het midden. Van de driehoek linksonder is dit het makkelijkst in te zien; die is namelijk net als de middelste driehoek rechthoekig en de rechthoekszijden zijn ook twee aan twee gelijk. Om te bewijzen dat de driehoek linksboven ook dezelfde oppervlakte heeft als de middelste driehoek, tekenen we een hulpdriehoek zoals hiernaast.



Die nieuwe driehoek is congruent met de middelste driehoek en heeft dus dezelfde oppervlakte. De gearceerde driehoek linksboven heeft een even grote basis en dezelfde hoogte als de hulpdriehoek, en heeft dus dezelfde oppervlakte. Evenzo bewijst men dat ook de rechter gearceerde driehoek dezelfde oppervakte heeft als de middelste driehoek.

78 De vierhoek is verdeeld in 9 delen, waarvan 5 al een naam hebben (v, w, x, y en z). Geef de andere 4 delen ook een naam: p, q, r en s.



Omdat AD' = BD', volgt:

$$\begin{array}{lll} w+s+x & = \text{opp(AD'D)} & = \text{opp(BD'D)} \\ y+q+z & = \text{opp(CB'B)} & = \text{opp(DB'B)} \\ \hline q+s+w+x+y+z & & = \text{opp(BD'D)} + \text{opp(DB'B)} \\ & & = \text{opp(DB'BD')} \\ & & = p+r+v \end{array} \quad +$$

Omdat A'B = A'C, volgt:

$$\begin{array}{lll} x+p+y & = \text{opp(AA'B)} & = \text{opp(AA'C)} \\ z+r+w & = \text{opp(CC'D)} & = \text{opp(CC'A)} \\ \hline p+r+w+x+y+z & & = \text{opp(AA'C)} + \text{opp(CC'A)} \\ & & = \text{opp(CC'AA')} \\ & & = q+s+v \end{array} \quad +$$

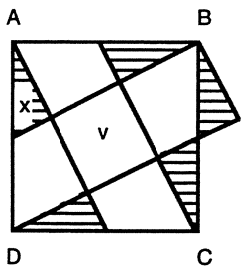
Dus:

$$\begin{array}{ll} q+s+w+x+y+z & = p+r+v \\ p+r+w+x+y+z & = q+s+v \\ \hline (p+q+r+s)+2(w+x+y+z) & = (p+q+r+s)+2v \end{array} \quad +$$

En nu volgt

$$2(w+x+y+z) = 2v$$
$$w+x+y+z = v$$

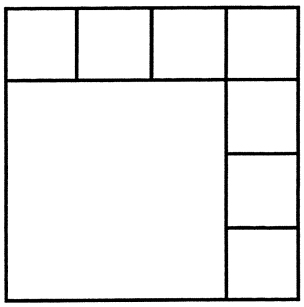
79 $w = x = y = z$, want de gearceerde driehoeken zijn gelijk (zie de figuur), en dus volgens de vorige opdracht $x = v/4$. Maar dan is de oppervlakte van elke van de gelijke trapezia $3v/4$. Dus de oppervlakte van het vierkant ABCD is gelijk aan $v + 4v = 5v$.



80 opp(ABC) = (AB × PQ + BC × PR + CA × PS)/2 = AB × (PQ + PR + PS)/2.

81 1/2 (onafhankelijk van de positie van het punt).

82 We nemen eerst het geval dat n even is, zeg $n = 2m$. Verdeel het vierkant eerst in een vierkant met zijden $(m-1)/m$, een vierkant met zijden $1/m$, en twee rechthoeken met zijden respectievelijk $(m-1)/m$ en $1/m$. Dit kan door twee onderling loodrechte lijnen in het vierkant te trekken. Beide rechthoeken kunnen worden onderverdeeld in $m-1$ kleine vierkantjes. Er zijn een vierkant met zijden $(m-1)/m$ en $2m-1$ vierkantjes met zijden $1/m$. Samen $2m = n$ vierkanten.

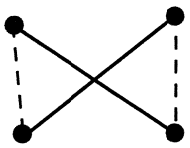


Nu het geval $n = 7$. Verdeel het grote vierkant in 4 kleine en één van hen in nog weer 4 vierkantjes. Resultaat: 3 vierkanten met zijden $1/2$ en 4 vierkantjes met zijden $1/4$.
Tenslotte het geval dat n oneven is en $n \geq 9$. Dan is $n - 3 \geq 6$ en even. We delen het grote vierkant eerst in $n-3$ vierkanten en delen één van hen (het geeft niet welke) nog weer in vieren. Dan komen er 4 vierkanten bij maar er gaat er 1 af, dus zijn er in totaal $n - 3 + 3 = n$ vierkanten.

83 Kies één gebied uit als referentie-gebied (bv. het gebied links onder) en noem dat gebied R. Geef elk ander gebied een score, en wel het aantal rechte lijnen dat tussen dat gebied en het gebied R loopt. Gebieden met een even score krijgen dezelfde kleur als het gebied R; gebieden met een oneven score krijgen de andere kleur.

84 Eerste oplossing.
Kies twee punten zodat als je de verbindingslijn tussen die twee punten trekt, alle andere punten allemaal aan dezelfde kant van deze lijn liggen. Trek nu het lijnstuk die deze twee punten verbindt, haal in gedachte deze twee punten weg en herhaal de procedure.

Tweede oplossing.
Verbind de punten twee aan twee met elkaar. Kijk naar de som van de lengten van de lijnsegmenten. Als er nu twee lijnsegmenten elkaar snijden dan kunnen we deze punten ook zo verbinden dat de twee nieuwe lijnsegmenten elkaar niet kruisen.



Merk nu op dat de som van de lengten van de lijnsegmenten is afgenomen. Omdat er maar eindig veel manieren zijn om de punten met elkaar te verbinden, moet dit proces van verminderen ophouden. Maar als dit ophoudt hebben we dus geen snijpunten meer.

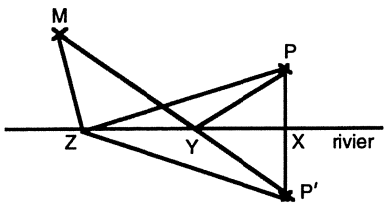
85 Verbind de rode en de blauwe punten twee aan twee met elkaar. De lijnstukken verbinden een rood punt met een blauw punt. Kijk naar de som van de lengten van de lijnsegmenten. Als er nu twee lijnsegmenten elkaar snijden dan kunnen we deze punten ook zo verbinden dat de twee nieuwe lijnsegmenten elkaar niet kruisen, en weer elke lijn een rood en een blauw punt verbindt. Merk nu op dat de som van de lengten van de lijnsegmenten is afgenomen. Omdat er maar eindig veel manieren zijn om de punten met elkaar te verbinden, moet dit proces van verminderen ophouden. Maar als dit ophoudt hebben we dus geen snijpunten meer.

86 Bekijk een triple punten P, Q en R met de eigenschap dat ze niet op één lijn liggen en de afstand van R tot de lijn PQ, dat is d(R, PQ) minimaal is. Volgens de aanname ligt er nog een punt op de lijn PQ, noem dit punt S. Zonder beperking der algemeenheid mogen we aannemen dat S tussen P en Q ligt. De driehoek PQR is de vereniging van de driehoek PRS en van de driehoek PRS.
Als we nu naar de oppervlakte kijken zien we opp(PQR) = d(R, PQ) × l(PQ). Maar er geldt:

$$\begin{aligned} d(R, PQ) \times l(PQ) &= d(S, PR) \times l(PR) + d(S, QR) \times l(QR) \\ &\geq d(R, PQ) \times l(PR) + d(R, PQ) \times l(QR) \\ &> d(R, PQ) \times l(PQ) \end{aligned}$$

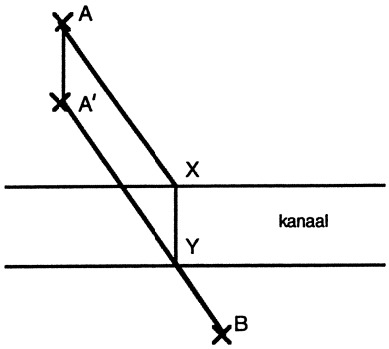
want $l(PR) + l(QR) > l(PQ)$.
En dit levert een tegenspraak op, dus zijn er geen P, Q en R punten die niet op één lijn liggen.

87 In de figuur geldt PX = P'X. Waar MP' de rivier snijdt, bij Y, moet de man komen om water halen, want voor een andere punt Z op de rivier geldt:

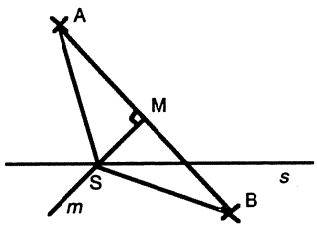


$$\begin{aligned} MZ + ZP &= MZ + ZP' \geq MP' \\ &= MY + YP' \\ &= MY + YP \end{aligned}$$

88 In de figuur is de totale loopafstand AX + XY + YB. Als A' zo gekozen is dat AA'YX een parallellogram is, dan is AX = A'Y. Dus de totale loopafstand is A'Y + YB + YX. Dit is minimaal als A'Y + YB minimaal is. Dat is het geval als A'YB een rechte lijn is. Dus het Y-punt van de brug moet de doorsnijding van A'B en de kanaaloever zijn.



89 In de figuur is AM = MB, en m staat loodrecht op AB. S is het snijpunt van m en s, de lijn van de spoor, daar moet het station gebouwd worden. Pas op: als A, B en s zo liggen dat de lijn AB loodrecht op s staat, dan zijn er twee mogelijkheden. Als M op s ligt, dan is m hetzelfde als s, en dus kan S elk punt van s zijn. Dit betekent dat er oneindig veel goede locaties voor het station zijn. Als M niet op s ligt, dan zijn m en s parallel. Dan is er geen oplossing.



90 9. De volgende 'stoelendans' is daarom toegestaan:
Stoel 1 wordt bezet.
Stoel 3 wordt bezet, niemand hoeft weg.
Stoel 2 wordt bezet, de persoon op stoel 3 gaat weg en de persoon op stoel 1 blijft zitten.
Stoel 4 wordt bezet, niemand hoeft weg.
Stoel 3 wordt bezet, de persoon op stoel 4 gaat weg en de persoon op stoel 2 blijft zitten.
Zo gaat het door totdat stoel 1 t/m 9 bezet zijn.

91 Op de 29-ste dag.

92 De tweede speler kan altijd winnen, nl. door steeds een rij weg te nemen als de eerste speler een kolom heeft weggenomen, en vice versa.

93 Als er maar één stapel is, dan neemt de eerste speler alle munten en wint. Als er in beide stapels maar één munt ligt, dan neemt de eerste speler één munt, en de tweede de andere en dus verliest de eerste. Als een stapel uit 2 munten bestaat en de andere uit 1 munt, dan neemt de eerste speler één van de twee munten uit de stapel, en creëert dus een verliezende situatie voor de tegenspeler. Zo doorgaande komen we tot de conclusie dat de beginspeler alleen kan winnen als het aantal munten in de twee stapels ongelijk is, andersom kan de tweede speler winnen.

94 Jij moet niet beginnen. Na elke zet is er een kolom of een rij afgebroken. Er zijn totaal 10 rijen en kolommen. Als de heks begint, zijn er na je eerste breuk nog 8 kolommen en rijen, na je tweede breuk nog 6, ... na je vierde breuk nog 2 kolommen en rijen – precies het vergiftigde stuk, dat blijft dus voor de heks.

95 Leg de eerste munt precies in het midden. Doe vervolgens steeds de zet van de tegenstander na, maar dan 180 graden gedraaid rondom het middelpunt.

96 De afstand die de vlieg aflegt is gelijk aan 15 km/u maal de tijd die de ossen erover doen om elkaar te ontmoeten. De ossen ontmoeten elkaar na 0.3 km gedeeld door 6 km/u. Dus heeft de vlieg $15 \times (0.3/6) = 0.75$ kilometer gevlogen.

97 Als de schepen elkaar de tweede keer ontmoeten heeft het langzame schip in totaal 1 keer de breedte van het IJ plus 85 meter afgelegd. Het snelle schip heeft in totaal 2 keer de breedte van het IJ min 85 meter afgelegd. Beide schepen samen hebben dus 3 keer de breedte van het IJ afgelegd. Wanneer de schepen elkaar de eerste keer ontmoeten, hebben ze samen 1 keer de breedte van het IJ afgelegd. In die tijd heeft het langzame schip 155 meter gevaren. Als ze later samen 3 keer de breedte van het IJ hebben afgelegd hebben ze dus 3 keer zo lang gevaren; daarom heeft het langzame schip in totaal $3 \times 155 = 465$ meter gevaren. We moeten dit nog verminderen met 85 meter, dus vinden we dat de breedte van het IJ 380 meter is.

98 Als onze zwemster terug is bij de kurk, moet ze even lang tegen de stroom in gezwommen hebben als met de stroom mee. Immers: stelt men zich de rivier voor als een lange trein dan staat de kurk stil ten opzichte van de trein. Maartje loopt dan 10 minuten tegen de rijrichting in; daarna loopt ze terug. Dan moet het ook weer 10 minuten duren voor ze terug is bij de kurk, want we beschouwen niet haar snelheid ten opzichte van het voorbijtrekkende landschap maar ten opzichte van de trein, en die snelheid is constant. In de 20 minuten die dat totaal duurde, reed de trein (de rivier) één kilometer. De snelheid van de rivier is dus 3 kilometer per uur.

99 De poes loopt behoorlijk hard als zij Groningen binnenstormt, maar let op. Na zeven snelheidsverhogingen heeft de poes het formidabele tempo van 12800 meter per minuut of 768 km/u bereikt. Als we de snelheid van het geluid stellen op 300 meter per seconden of 18000 meter per minuut, dan heeft de poes, toen ze 12800 meter per minuut liep het belletje nog kunnen horen. Ze heeft dus haar snelheid toen verdubbeld tot 25600 meter per minuut, maar zodra ze die snelheid had verkregen kon het geluid van het belletje haar niet meer bereiken. Het tempo wordt dus niet verder opgevoerd en zij komt met 25600 meter per minuut of 1536 km/u Groningen binnen.

100 We nummeren de deuren 1, 2 en 3. Achter no. 1 ligt de prijs. De kandidaat kiest twee keer. Als hij besluit om beide keren dezelfde deur te kiezen, zijn er drie mogelijkheden. Alleen bij één mogelijkheid wint de kandidaat. Dus heeft hij dan een kans 1/3 op de prijs.
Als hij besluit om de tweede keer een andere deur te kiezen dan de eerste keer, zijn er 4 mogelijkheden: 1 en 3, 1 en 2, 2 en 1, 3 en 1. Hij krijgt de prijs bij de derde en vierde mogelijkheden, die elk de kans 1/3 hebben. Dus heeft hij een kans 2/3 op de prijs. De tweede strategie is dus beter.