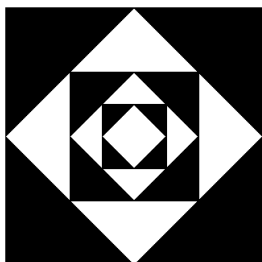
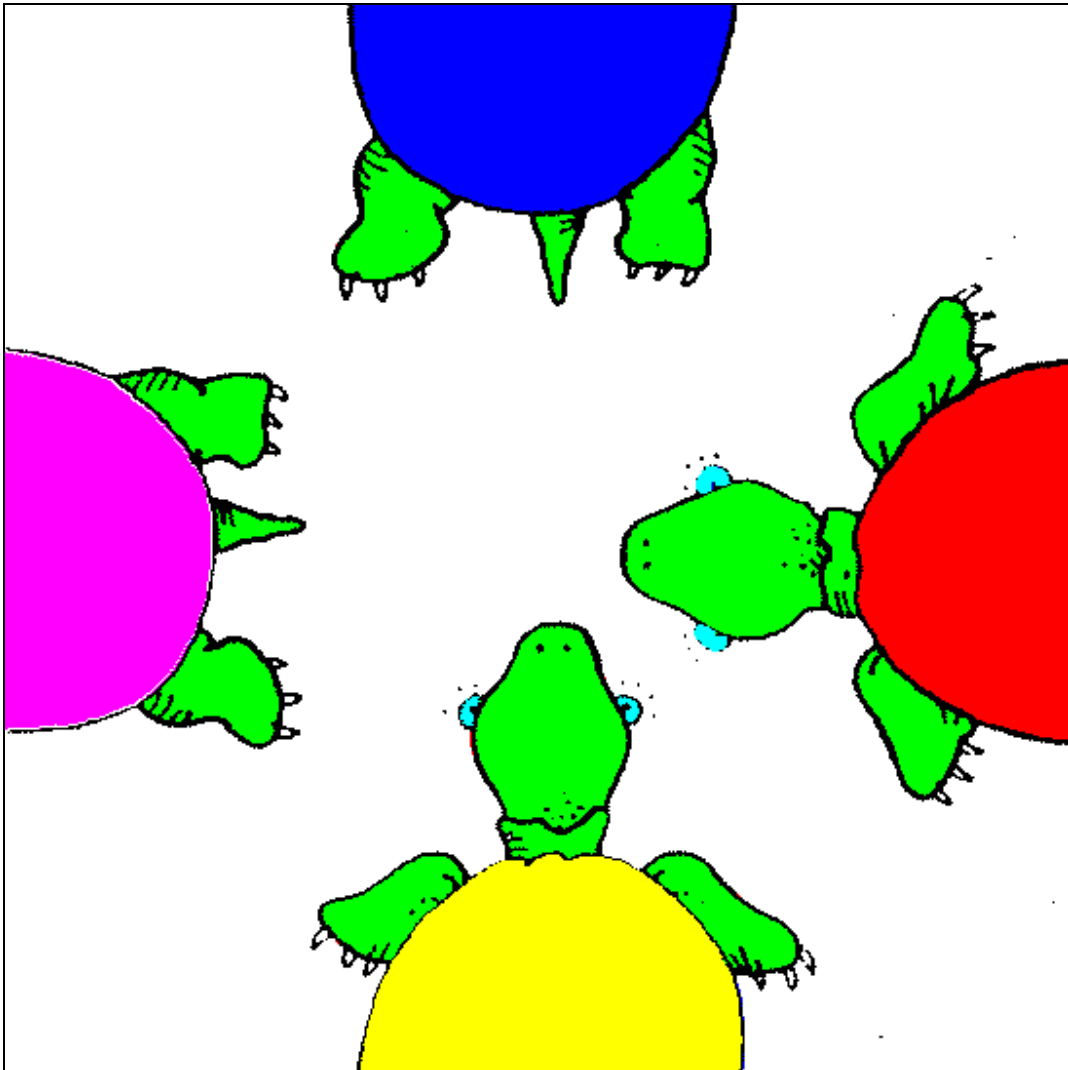


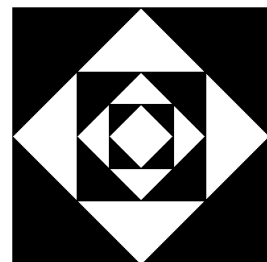
1001 schildpadden nacht

Kraak de schildpaddenpuzzel!



Joost Langeveld

Vierkant voor Wiskunde
Wiskundeclubs



Het verhaal van Sherezade

SHEREZADE was een legendarische Arabische vrouw die door de Sultan ter dood was veroordeeld. De Sultan zei echter dat hij haar leven zou sparen als ze hem iedere avond een mooi verhaal zou vertellen. Dat deed Sherezade iedere nacht, wel 1001 nachten achter elkaar. Deze verhalen staan nu bekend als de verhalen van duizend en één nacht.

Wat echter een stuk minder bekend is, is hoe het met Sherezade afliep na die 1001 nachten van verhaaltjes vertellen. Sultan Harri d'Quaaisteni was onder de indruk van haar vertelkunsten en een beetje verliefd op Sherezade. Hij wilde wel met haar trouwen. Sherezade zelf zag dat ook wel zitten. De moeder van de Sultan vond Sherezade echter niet slim genoeg voor haar zoon. Toen bedacht de Sultan een plan. Hij riep zijn hofgeleerde Ali Ibn Al'jabr bij zich, die net klaar was met het bedenken van de algebra.



De Sultan vroeg Ali een moeilijke puzzel te bedenken. Sherezade kon dan laten zien hoe slim ze wel niet was door de puzzel op te lossen. Als zijn moeder dat zou zien, kon ze hem niet meer tegenhouden om met Sherezade te trouwen. De puzzel die Ali bedacht heet de schildpaddenpuzzel.

De schildpaddenpuzzel is een legpuzzel met maar negen stukjes. Ieder puzzelstukje is vierkant en er staan vier halve schildpadden op: twee koppen en twee staarten. Het schild van iedere schildpad is gekleurd: rood, geel, blauw of paars.

Doel van de puzzel:

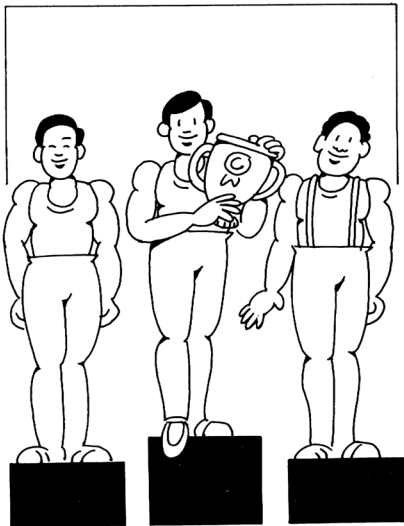
Leg de puzzelstukjes in een vierkant. De stukjes moeten zo liggen dat de schildpadden kloppen:

- Er ligt steeds een kop aan een staart.
- Ook moeten een kop en een staart die aan elkaar liggen dezelfde kleur hebben.

Hoe moeilijk is dat nou?

DE MOEDER van Harri was niet zo onder de indruk van deze puzzel: “Het zijn maar negen stukjes, dat kan nooit moeilijk zijn! Ik heb al puzzels gemaakt met 10 maal 10 stukjes!”. Nu zat onze Sultan weer met zijn handen in de tulband en ging naar Ali om hulp. Die besloot om aan Harris moeder te laten zien op hoeveel verschillende manier je de negen stukjes aan elkaar kon leggen. Omdat de moeder van de Sultan dacht in stappen van 10, was ze snel onder de indruk van grote getallen.

Hoe tel je nu hoeveel verschillende mogelijkheden er zijn? Dat gaat eigenlijk best makkelijk. We zullen eerst een kleiner voorbeeld bekijken.



Arif, Badir en Calif zijn de enige deelnemers op de Olympische Spelen op het onderdeel polsstok-laag-kruipen. De commentator zegt van tevoren: “De medaillewinnaars zijn al bekend, maar nog niet wie welke medaille wint. Op hoeveel manieren kunnen we de drie medailles verdelen over de drie winnaars?”

Schrijf eens alle verschillende manieren op waarop de medailles verdeeld kunnen worden.

Let op! Er staan meer rijen in de tabel dan je hoeft in te vullen!

	1.	2.	3.
1.	Arif	Badir	Calif
2.			
3.			
4.			
5.			
6.			
7.			
8.			

Hoeveel verschillende manieren heb je nu gevonden?

Een andere manier om dat uit te rekenen is als volgt:

- Er zijn ... mogelijkheden voor wie er eerste wordt.
- Als ik weet wie er eerste is, zijn er nog ... mogelijkheden over voor de tweede plaats.
- Als ik weet wie er eerste en tweede zijn, is er nog maar ... mogelijkheid voor wie er derde wordt.

Dan zijn er

$$\dots \times \dots \times \dots = \dots \text{ verschillende uitslagen.}$$

Klopt dit met je antwoord op de vorige bladzijde?

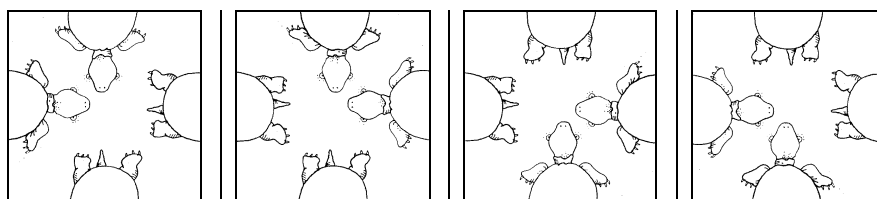
Ali Ibn Al'jabr ging op dezelfde manier tellen aan de puzzel. Hij maakt eerst een rooster:

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Toen dacht Ali: "Hoeveel verschillende stukjes kan ik nu op vakje nummer 1 leggen?". Wat is het antwoord?

Kun je nu ook zeggen op hoe je kunt berekenen op hoeveel verschillende manieren je alle negen stukjes in het rooster kunt leggen?

Ali bedacht zich echter dat de puzzel nog meer mogelijkheden had! Je kon ieder stukje ook nog eens op 4 verschillende manieren neerleggen: steeds een kwartslag gedraaid:



Dus je kan het eerste puzzelstukje op 4 manieren neerleggen, het tweede op 4 manieren, het derde op 4 manieren...

Op hoeveel manieren zou je nu 9 puzzelstukjes kunnen neerleggen?

Nu weet je dus op hoeveel verschillende manieren je negen stukjes kunt neerleggen. Ook weet je op hoeveel verschillende manieren je negen stukjes in het rooster kunt sorteren (zie vorige pagina). Met deze twee uitkomsten kun je nu berekenen wat het totaal aantal verschillende mogelijkheden is:

x	$=$
-----	-----

Toen Ali met deze uitkomst aankwam, was Harri heel blij. Zijn moeder was zo onder de indruk dat ze zei: “Als Sherezade die puzzel kan oplossen, dan mag je met haar trouwen!”

Aan de slag met de puzzel

S

HEREZADE was ook erg onder de indruk van hoe moeilijk de puzzel was. Ze was helemaal niet goed in legpuzzels! Daarom ging ze hulp zoeken bij haar beste vriend(in) Mato Haro / Mata Hara. Jij speelt nu de vriend(in) van Sherezade. Aan de slag!

Bij dit onderzoeksprogramma heb je ook nog twee losse blaadjes gekregen:

- Een spiekblad met de tekst “*De puzzelstukjes en hoe we ze neerleggen*”.
- Een *uitknipblad*.
- Een *rooster*

Pak die er nu bij. Kleur de puzzelstukjes van het uitknipblad zoals op het spiekblad is aangegeven. (eventueel: op karton plakken voor het uitknippen).

Knip ze daarna uit en zet achterop de stukjes de nummers die je op het spiekblad ziet. Dat is handig voor als je straks een bepaald stukje zoekt.

We gaan nu eerst proberen de stukjes in het rooster te leggen zonder ons zorgen te maken over de kleuren. Omdat we over de verschillende vakjes van het rooster willen kunnen praten, geven we alle vakjes een naam. Dit doen we net als op een schaakbord. Maar het geeft niet als je niet weet hoe dat is. Het vakje linksonder is dan **A1**, en het vakje rechtsboven **C3**. Dit kun je ook zien op het spiekblaadje.

Leg eens drie puzzelstukjes neer op de onderste rij (A1, B1 en C1). Zorg dat je koppen aan staarten legt, zodat je twee hele schildpadden krijgt. Kan het zo zijn dat de ene schildpad naar links loopt en de andere naar rechts? Is het antwoord anders als je ze neerlegt in een andere rij (rij 2 of rij 3)?



Begin opnieuw en doe nu hetzelfde met drie puzzelstukjes in de linkerkolom (A1, A2 en A3). Je krijgt weer twee hele schildpadden. Kan het nu zo zijn dat de ene schildpad omhoog loopt en de ander omlaag? En als je ze in de B-kolom of de C-kolom legt?



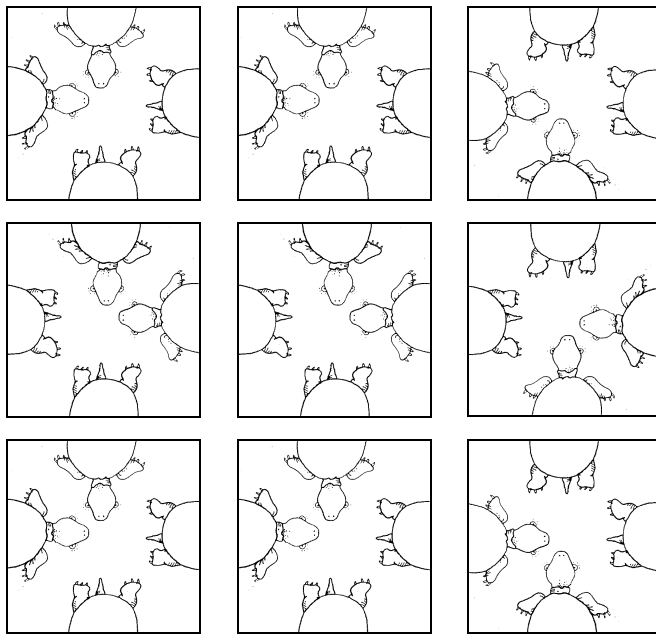
Als de schildpadden in de linkerkolom (A1, A2, A3) naar beneden laten lopen, kan je dan de schildpadden in de middelste kolom (B1, B2, B3) naar boven laten lopen? Kan je ze in de middelste kolom ook naar beneden laten lopen? Hoe zit het met de andere kolommen en rijen?



We zien dus dat:

- In iedere rij de schildpadden allebei
- In iedere kolom de schildpadden allebei
- We voor iedere rij en kolom afzonderlijk kunnen kiezen

Een mogelijke manier om de puzzelstukjes neer te leggen is bijvoorbeeld



zoals in het plaatje hiernaast. Zo'n manier van neerleggen waarbij we niet op de kleuren letten, noemen we een *oriëntatie*.

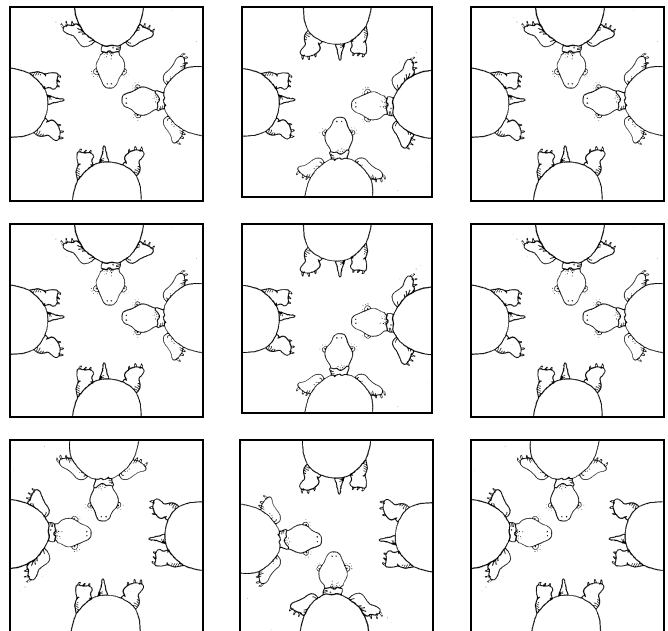
Zo'n oriëntatie kunnen we ook een naam geven, waaraan we kunnen zien wat er gebeurt. We zien dat in de A-kolom de schildpadden omlaag lopen. We zeggen nu "A: omlaag". Zo ook met de B- en de C-kolom. In de 1-rij lopen de

schildpadden naar rechts, dus dat wordt "1: rechts". Alles bij elkaar ziet er zo uit:

A: omlaag	1: rechts
B: omlaag	2: links
C: omhoog	3: rechts

Geef nu zelf de oriëntatie hier rechts een naam:

A:	
B:	
C:	
1:	
2:	
3:	



Kijk nu nog eens naar de onderste oriëntatie en draai het papier een kwartslag naar links (tegen de klok in). Schrijf de naam van de oriëntatie weer op. Vergelijk nu eens met de bovenste oriëntatie. Wat valt je op?

Sherezade kijkt wat je doet en roept uit: “Aha! Dus als je één oriëntatie hebt gevonden, dan heb je er eigenlijk meteen vier! Je hoeft alleen maar het papier te draaien!”.

Nu is ze toch benieuwd naar hoeveel echt verschillende oriëntaties er zijn. Twee oriëntaties zijn echt verschillend als je de ene niet kunt maken door de andere te draaien. Onze heldin vraagt de geleerde Ali om hulp. Hij zegt: “We zagen dat de richting van de ene rij geen invloed heeft op de richting van een andere rij. Daarom mogen we weer dezelfde manier van tellen gebruiken als in het begin toen we het totaal aantal manieren telden om de stukjes in een vierkant te leggen.”

Hoeveel verschillende richtingen zijn er voor de 1-rij? En voor de andere rijen? Hoe zit dat bij de kolommen?

We hebben drie kolommen en drie rijen. We moeten dus in totaal zes keer een keuze maken uit ... richtingen. Hoeveel oriëntaties levert ons dat op?

$... \times ... \times ... \times ... \times ... \times ... =$

Maar dat zijn niet allemaal echt verschillende oriëntaties, er zitten nog veel “dubbele” tussen. Maar door de opmerking van Sherezade kun je nu uitrekenen hoeveel echt verschillende oriëntaties er zijn:

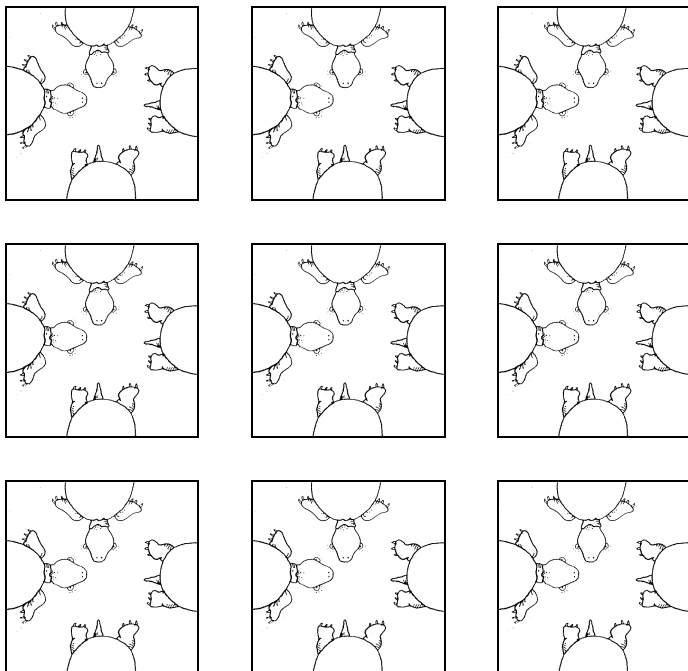
Kleurenprobleem

W

E HEBBEN net gezien hoeveel verschillende oriëntaties er zijn. Terwijl je samen met Sherezade zit na te denken over hoe het nu verder moet, komt Ali Ibn Al'jabr aangeslopen. Hij mag Sherezade en de Sultan wel en wil zorgen dat jullie de puzzel oplossen. Omdat de moeder van Harri toekijkt, kan hij niet teveel zeggen maar hij fluistert: "Niet alle oriëntaties leveren een oplossing voor de puzzel. Maar met deze kan dat wel.". Nadat hij dit gezegd heeft, duwt hij een papiertje met een snelle krabbel in je handen. Erop staat dit:

A, B en C: omlaag
1, 2 en 3: rechts

Samen met Sherezade teken je dit wat verder uit en merkt dat alle stukjes in dezelfde richting liggen:



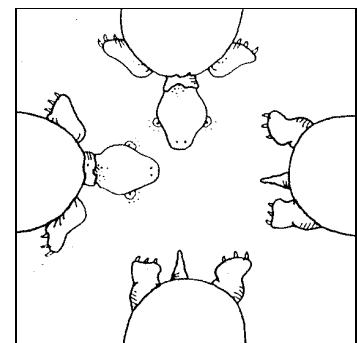
Nu weten jij en Sherezade dus dat met deze oriëntatie een oplossing te vinden is. Maar jullie weten nog niet welke puzzelstukjes waar moeten komen in de oriëntatie. Dat gaan we nu in stappen aanpakken.

Sherezade ziet dat niet alle kleuren even vaak voorkomen als kop en staart. Ze besluit om alle koppen en staarten per kleur te tellen. Dan kan ze direct zien hoeveel hele schildpadden ze per kleur maximaal kan maken. Haar antwoorden zet ze in de volgende tabel. Kun jij haar helpen de tabel af te maken?

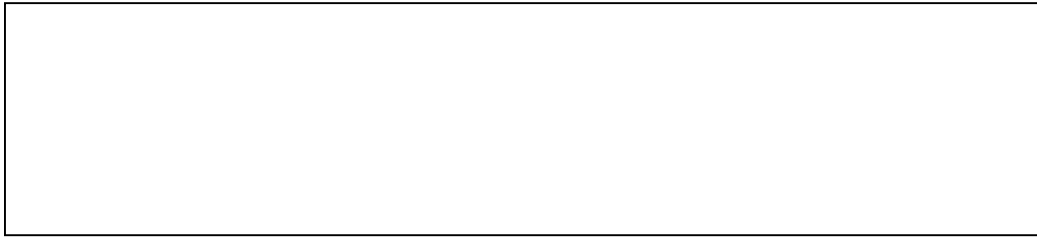
Kleur \ Aantal	Kop	Staart	Dieren
Rood	6	3	3
Blauw			
Geel			
Paars			

In iedere oriëntatie komen steeds evenveel hele schildpadden voor. Hoeveel zijn dit er eigenlijk?

Stel dat je een puzzelstukje in de richting neerlegt zoals op het plaatje hier rechts. Kijk nu eens goed naar je puzzelstukjes. Hebben we stukjes waarbij de linkerkop geel is? Of waarbij de linkerkop blauw is?



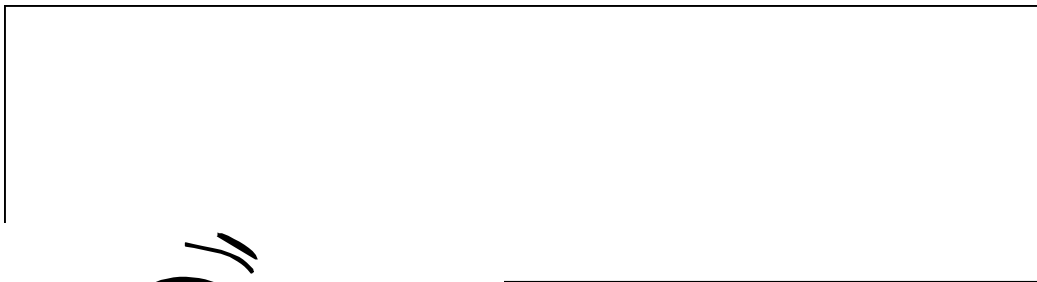
Toch hebben we stukjes waarbij de staart rechts geel of blauw is: puzzelstukjes 1, 7 en 8. Omdat we deze stukjes ook in de oplossing voorkomen, moeten we ze toch ergens kwijt. Ze moeten allemaal in één kolom. Welke kolom is dat eigenlijk? Op hoeveel verschillende manier kunnen we stukjes 1, 7 en 8 in die kolom kwijt?



Leg de puzzelstukjes 1, 7 en 8 op die manier in het rooster. Bij de randstukken hebben we een paar halve schildpadden aan de buitenkant van het rooster.. Die kunnen we niet meer gebruiken om hele schildpadden mee te maken. We willen kijken hoeveel koppen en staarten we nog wel kunnen gebruiken. Daarom tellen we de koppen staarten aan de buitenkant. Dat trekken die af van de getallen in de tabel op de vorige bladzijde. De resultaten kun je in de volgende tabel kwijt.

Kleur \ Aantal	Kop	Staart	Dieren
Rood	6-1=5	3	3
Blauw			
Geel			
Paars			

Tel nu eens de uitkomsten in de “Dieren”-kolom op. Dit is precies het aantal schildpadden in een orientatie! Hoeveel hele schildpadden van elke kleur zitten er dus in onze oplossing?



Het gaat best goed met het oplossen! Ali, Harri en Sherezade worden steeds blijer. Net als de schildpadden zelf trouwens. We zijn echter nog niet klaar!

Bekijk nu puzzelstukje 4 eens. Als we dit stukje in dezelfde richting leggen, hebben we onderaan een gele staart. Kijk nu goed naar de tabel hierboven en bedenk waar dit stukje wel en niet kan liggen.

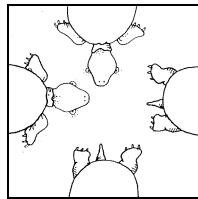
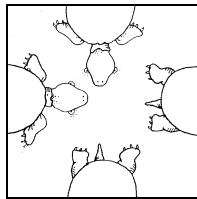
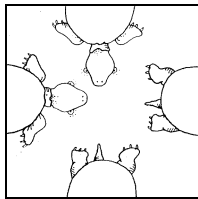
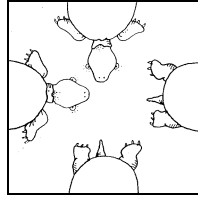
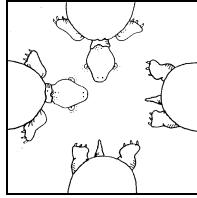
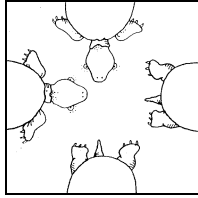
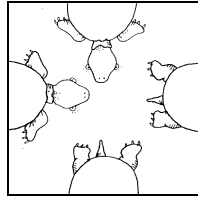
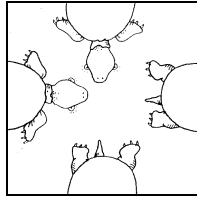
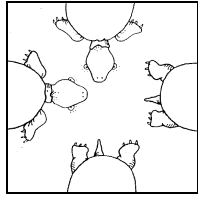
In welke rij kan puzzelstukje 4 nog liggen in het rooster? Waarom?

--

Ook van puzzelstukje 9 kunnen we wat meer zeggen. In welke rij kan dit stukje **NIET** liggen?

--

Je bent nu bijna klaar. Ga nu proberen met wat puzzelen de oplossing te vinden. Je weet de plek van stukje 4 bijna. Kies daarom eerst een plekje voor dit stukje en kijk dan of je eruit komt. Lukt het niet, probeer dan een andere plek voor stukje 4. Kleur de puzzelstukjes hieronder in volgens je oplossing.



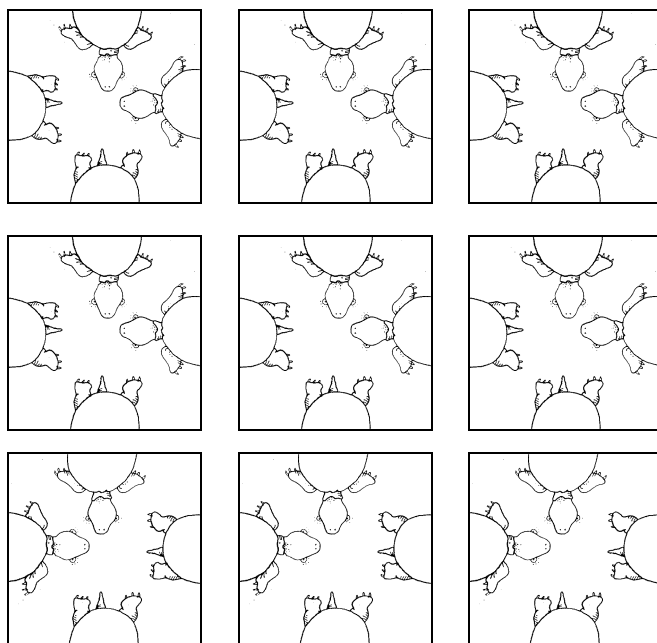
En ze leefden nog...

SHEREZADE SPRONG een gat in de lucht toen ze zag dat je de oplossing had gevonden. Snel ging ze ermee naar de moeder van Harri. Die moest toegeven dat het Sherezade gelukt was de puzzel van Ali Ibn Al'Jabr op te lossen. Nu ze zag dat Sherezade helemaal niet zo dom was, vond ze haar direct een stuk aardiger. Niets stond het huwelijk tussen Sherezade en Harri meer in de weg!

Harri en zijn mooie vriendin trouwden kort daarna en leefden nog lang en gelukkig.

Maar jij, Mato Haro/Mata Hari, was nog niet tevreden. Jullie hadden nu wel een oplossing gevonden voor de puzzel, maar waren er nog meer? Je moeder noemt je niet voor niets zo nieuwsgierig als een ezel en koppig als een kameel!

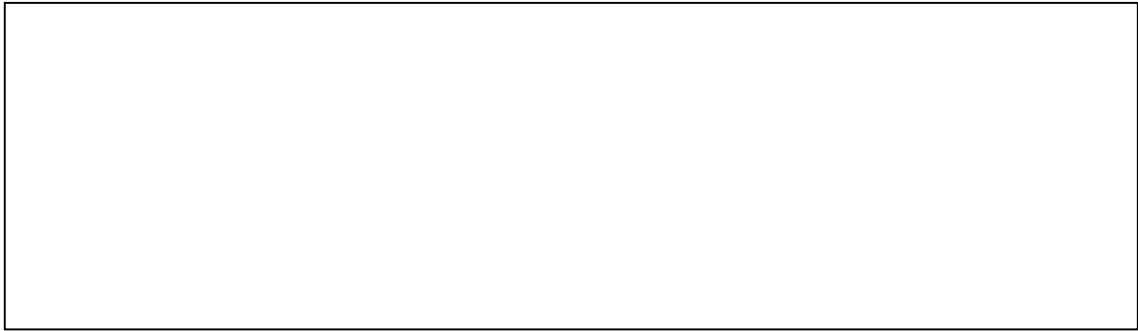
We hebben al gezien dat je geen echt verschillende oriëntatie krijgt als je de hele puzzel een kwartslag draait. We willen een echt andere oriëntatie bekijken.



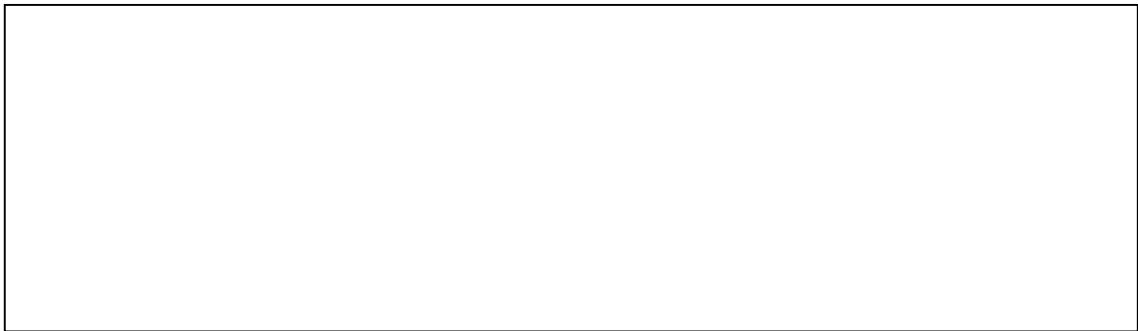
Ali had nog een laatste tip gegeven: er is nog maar één andere oriëntatie die een oplossing oplevert. Die hebben we hiernaast getekend.

A: omlaag	1: rechts
B: omlaag	2: links
C: omlaag	3: links

We gaan nu wat sneller dan de vorige keer. Maar je hebt ook al kunnen oefenen! Pak nu eens de stukjes 1, 7 en 8. Deze kunnen niet in rij 3 liggen. Waarom? (Denk aan de stukjes die in rij 2 moeten komen!)



Ook kunnen deze stukjes niet op de plekken A1 en B1 in het rooster liggen. Waarom?



We kijken nu alleen even naar deze 3 stukjes. Er blijven maar vier mogelijkheden om deze stukjes neer te leggen. We hebben die vier hier opgeschreven.

1	8	
		7

Mogelijkheid 1

7	1	
		8

Mogelijkheid 2

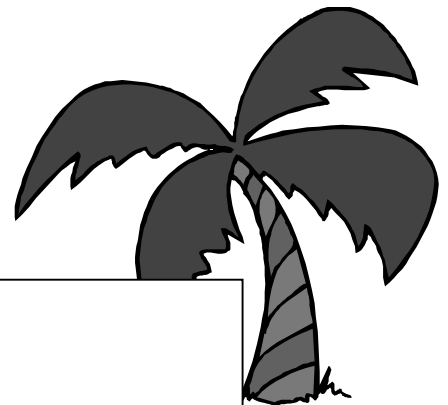
8		7
		1

Mogelijkheid 3

7	1	8

Mogelijkheid 4

We gaan deze mogelijkheden één voor één bekijken. We beginnen met mogelijkheid 1. Kijk eens goed naar welk blokje er op plek C2 moet komen. Laat nu zien dat deze mogelijkheid af moet vallen.



Ook mogelijkheid 2 moet afvallen. Dat is wat meer werk. Kijk hiervoor eerst naar welk stukje er op B1 moet komen en dan welk op A1.

Op plek C2 kunnen we nu nog stukje 3 of stukje 6 leggen. Maar dan komen de stukjes 5 en 9 op de onderste rij te liggen. Stukje 5 en 9 hebben allebei een groene staart onderaan liggen. Daar kunnen we dus geen hele schildpad meer mee maken. Maar nu hebben we te weinig groene staarten over om twaalf hele schildpadden af te krijgen. Denk maar aan wat we deden op bladzijde 11.

Kun je nu zelf op zo een zelfde manier uitleggen waarom mogelijkheid 3 niet kan?

Nu blijft over mogelijkheid 4. Deze zullen we nu ook echt gaan oplossen! Op plek A1 moet stukje 4 of 9 komen te liggen. Kun jij uitzoeken welk van de twee de juiste is?

Maak nu de puzzel zelf af. Laatste tip: begin eerst een plekje te zoeken voor stukje 6.

...
7	1	8
...



Rooster

			3
			2
			1

A

B

C

Uitknipblad

