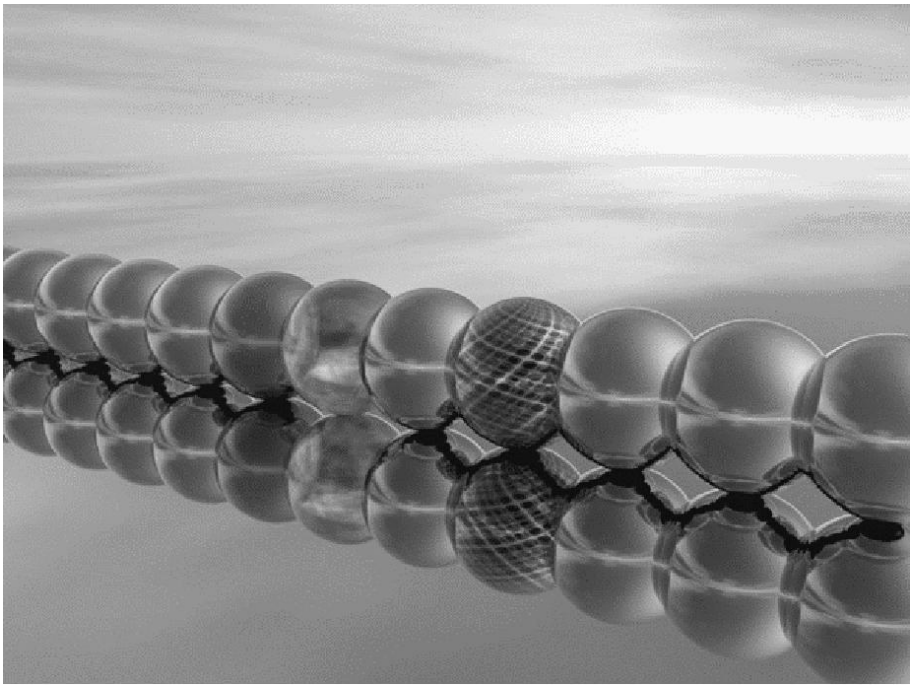
MACHINES



. . . en kralenkettingen.

Onderzoeksprogramma
Vierkant voor Wiskunde

Wiskundeclubs

Tristan Cranendonk & Joost Langeveld

Uitleg van de gebruikte symbolen:

In de kantlijn staan een aantal speciale symbolen. Deze hebben de volgende betekenis:

✂ staat voor een praktische opdracht: vaak betekent dit dat je iets moet tekenen.

☞ staat voor een denk-opdracht: een som uitrekenen of een antwoord beredeneren.

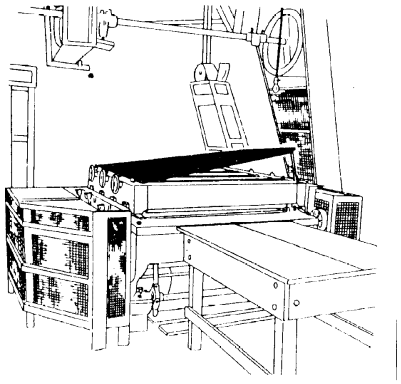
★ staat voor een moeilijke opgave.

Deel I: Niet-wiskundige machines

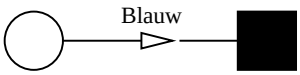
Meneer Glimmerstra is dit jaar met pensioen gegaan. Hij heeft vroeger in de TikTak-kralenketting fabriek in Titjerkstradeel gewerkt. Hij werkte in de rijgerij waar alle kettingen geregen worden. Hij heeft de hele ontwikkeling van de kralenketting voor ons opgeschreven. Wij (Tristan en Joost) hebben om deze geschiedenis heen wat sommetjes bedacht, als inleiding voor deel twee.

Kralenketting machines

Toen meneer Glimmerstra begon met werken in de kralenkettingfabriek, werden alle kettingen nog met de hand geregen: kraaltje voor kraaltje. Dit was enorm saai werk, dus vond meneer Glimmerstra een machine uit die het werk voor hem deed.



De eerste machine die hij uitvond, kon alleen maar hele simpele kettingen maken: een ketting met één blauwe kraal. Hierboven is een plaatje van zo'n machine. Daar kun je echter niet aan zien wat de machine doet. Dat kun je wel zien aan het schema van een machine. Dat is een wiskundig plaatje van wat de machine allemaal kan. Het ziet er als volgt uit:



Het schema bestaat uit *toestanden* en *overgangen*. De toestanden zijn plekken waar de machine even stil kan staan tijdens het rijgen van de kettingen. Dus tussen het rijgen van 2 kralen bijvoorbeeld. De toestanden geven we aan met cirkeltjes en vierkantjes.

De overgangen geven aan wat de machine doet tussen het toestanden: welke kleur kraal wordt er aan de ketting geregen. Deze overgangen geven we aan met pijlen. Bij de pijl staat de kleur van de kraal die aan de ketting geregen wordt.

De *begintoestand* geven we aan met een open symbooltje: wit in plaats van zwart. Op die plek begint de machine met het maken van de ketting. Een vierkantje betekent de *eindtoestand*: alleen in deze toestand kan de machine stoppen met het rijgen van een ketting. Maar de machine hoeft dan niet meteen te stoppen: je kunt ook eerst langs nog meer toestanden gaan, terugkomen in de eindtoestand en dan pas stoppen.

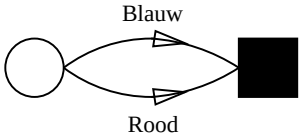
Behalve begintoestanden en eindtoestanden kun je ook "tussentoestanden"gebruiken. Dan kun je ook machines maken die langere kettingen kunnen maken dat slechts 1 kraal. Zo'n tussentoestand teken je met een gesloten (zwart) cirkeltje.

In dit programma kijken we alleen naar wat een machine doet en niet naar welke radertjes daarvoor nodig zijn. Daarom zijn eigenlijk alleen de schema's belangrijk. Voor de rest van het programma bekijken we daarom ook alleen nog schema's van machines. Als er bij een opgave staat "teken een machine", bedoelen we dus "teken het schema van een machine".

✂ **Opgave 1**

Teken nu zelf een machine die een ketting maakt met eerst een rode, dan een witte en dan een blauwe kraal. Deze ketting noemen we ook wel "rood-wit-blauw".

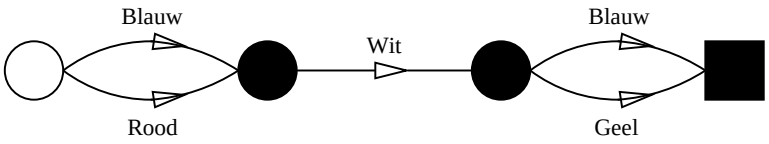
In de loop van de tijd werden de machines natuurlijk beter. Zo kwam de doorbraak van de machine die verschillende kettingen kon rijgen. Kijk maar in het volgende plaatje:



Deze machine kan een ketting maken met één blauwe kraal, of een ketting met één rode kraal. Vanaf de begintoestand moet je kiezen welke pijl je volgt.

Opgave 2

Welke kettingen kun je maken met de volgende machine:



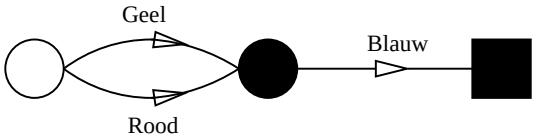
Opgave 3

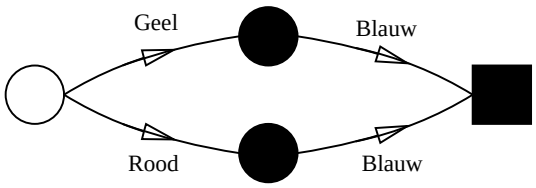
Maak nu zelf een machine waarmee je de volgende kettingen kan maken:

- rood - geel - rood - geel
- geel - geel - geel - geel

Welke andere kettingen kun je nog meer maken met deze machine? Zou je ook een andere machine kunnen maken die de kettingen van hierboven kan maken? Welke andere kettingen kan die machine nog meer maken?

Zelfs als twee machines precies dezelfde kettingen kunnen maken, hoeven ze er nog niet hetzelfde uit te zien:





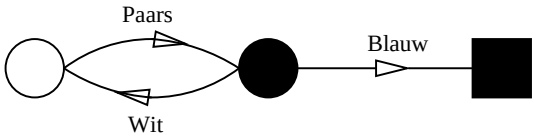
Als meneer Glimmerstra een machine maakt, probeert hij dit altijd te doen met zo weinig mogelijk onderdelen (overgangen en toestanden). Van de twee machines in het plaatje hierboven vindt hij de linker dus mooier.

Machines voor langere kettingen

In alle machines die je tot nu toe gezien hebt liepen de pijlen van links naar rechts. De pijlen kunnen echter ook van rechts naar links gaan. Dan kun je veel langere kettingen maken.

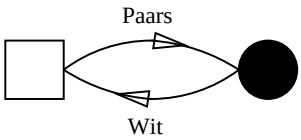
☞ **Opgave 4**

Wat voor een kettingen kun je maken met deze machine?



In sommige machines is de begintoestand ook meteen de eindtoestand: je kunt dan meteen stoppen en dan heb je een ketting zonder kralen. Deze toestand is dan open (wit) en vierkant. Denk er wel aan dat de machine niet hoeft te stoppen in de eindtoestand: je kunt eerst nog meer kralen rijgen en dan weer terugkomen in de eindtoestand om te stoppen. Je ziet dan een pijl uit het vierkantje gaan.

Een voorbeeld:



Met deze machine kun je óf een ketting zonder kralen maken, óf een ketting met het patroon paars-wit herhaald zo vaak als je maar wilt.

✂ **Opgave 5**

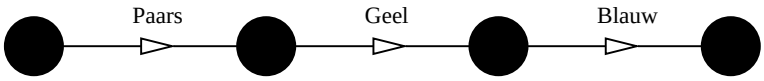
Je moet nu zelf weer een machine tekenen. Deze machine maakt kettingen die beginnen met een oranje kraal. Daarna rijgt hij steeds het patroon rood-wit-blauw, zo vaak als je maar wilt. Een goede ketting is dus bijvoorbeeld oranje-rood-wit-blauw-rood-wit-blauw.

Bij de vorige machines liepen de overgangen steeds tussen twee verschillende toestanden: alle pijlen liepen van de ene cirkel naar de andere. Meneer Glimmerstra heeft bedacht dat je ook pijlen moet kunnen trekken van een toestand terug naar zichzelf: een lus dus.

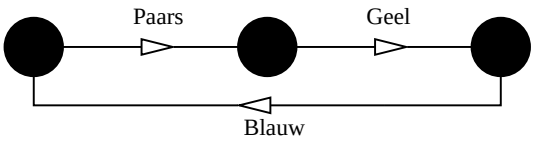
Opgave 6

We willen nu een machine maken die een ketting kan maken die zo lang kan worden als je zelf maar wilt. Kan je zo'n machine maken met slechts één pijl?

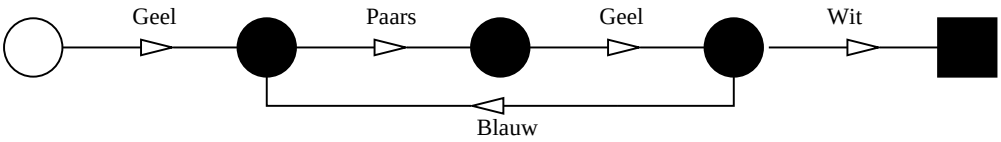
De pijlen die van rechts naar links lopen kun je ook gebruiken om snel machines te ontwerpen die een bepaald patroon herhalen of verschillende patronen afwisselen. Eerst maak je de machine die alleen dat patroon maakt, maar dan zonder begin of eindtoestand.



Dan "plak" je de eerste toestand en de laatste toestand op elkaar.



Nu heb je een stuk machine dat je weer in een andere machine kunt gebruiken:



Op deze manier kun je makkelijk patronen in een machine programmeren. Natuurlijk kun je ook verschillende patronen in een enkele machine stoppen. Daar gaat de volgende opgave over.

★✂ **Opgave 7**

Maak nu zelf een machine die het volgende doet:

- De machine maakt een ketting met een aantal keer drie kralen.
- De drie kralen zijn steeds rood-wit-blauw, of paars-geel-oranje.

Bij meneer Glimmerstra in de fabriek werkte ook meneer Broekstra. Hij had vaak goede nieuwe ideeën en ook nu had hij weer iets bedacht. Hij vertelde meneer Glimmerstra over een nieuwe machine die hij wilde bouwen: een machine die kijkt welke kraal er als laatste is geregen. De kleur van die laatste kraal bepaalt dan welke kraal de volgende zal zijn. Meneer Broekstra had een papiertje waarop dit uitgelegd stond:

laatste kraal	volgende kraal
rood	geel
geel	blauw
blauw	paars
paars	oranje
oranje	wit
wit	je mag zelf kiezen

De ketting kon alleen eindigen met een witte kraal: als je zelf mag kiezen, kun je dus ook “geen kraal” kiezen.

Meneer Glimmerstra is echter iets slimmer dan meneer Broekstra. Hij zag meteen dat je de machine van meneer Broekstra ook kon bouwen op de manier die je net geleerd hebt. Het is eigenlijk dus helemaal geen nieuwe machine. Probeer zelf maar eens te ontdekken welke machine meneer Glimmerstra voor zich zag.

Let er hierbij op dat je met een willekeurige kraal mag beginnen.

Opgave 8

Teken de machine die werkt volgens het blaadje van meneer Broekstra.

Controle machines

Als meneer Glimmerstra een nieuwe machine had gemaakt, wilde hij zijn nieuwe machines graag testen voordat hij ze aan zijn baas liet zien. Om te kijken of de kralenkettingen wel kloppen gebruikte hij een andere machine: een controle machine. Deze machine controleert of er geen kraal vergeten is of dat er een kraal van de verkeerde kleur gebruikt wordt.

Deze controle machines werken op een andere manier dan de rijgmachines. Bij de controle machines stop je aan de ene kant een kralenketting in de machine. De machine gaat dan nadenken en er licht een lampje op met “GOED” of een met “FOUT”.

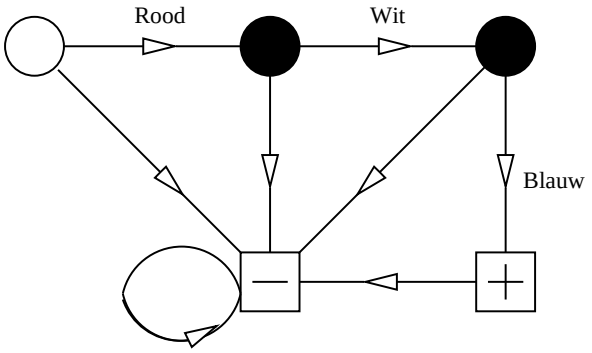
Controle machine werken ook met toestanden en overgangen. De machine begint gewoon weer in de begintoestand. Dan kijkt de machine naar de kleur van de eerste kraal. Die kleur bepaald welke stap in de machine wordt genomen. Je kan dus niet zelf kiezen welke kant je op gaat! Na die stap wordt weer gekeken naar de kleur van de volgende kraal en die kleur bepaald weer welke stap er genomen wordt. De ketting is als het ware de route die aangeeft hoe er door de machine gelopen moet worden.

Er zijn nu twee mogelijke eindtoestanden:

- De toestand “FOUT”.
- De toestand “GOED”.

De machine stopt pas met controleren als hij alle kralen van de ketting heeft afgelopen. Dus niet direct als hij in één van de twee eindtoestanden is aangekomen. Als de kralenketting “op” is en de machine is niet in een eindtoestand, gaat de machine direct naar de toestand Fout.

De volgende machine gaat na of een ketting van de vorm rood-wit-blauw is:



Je ziet dat vanaf het beginpunt de serie rood-wit-blauw eindigt in Goed. De pijlen waar geen kleur bij staat staan voor “iets anders”: een andere kleur kraal of dat de ketting op is. Als je dus bij de begintoestand begint en de eerste kraal is geel, dan volg je deze pijl naar de toestand Fout.

☞ **Opgave 9**

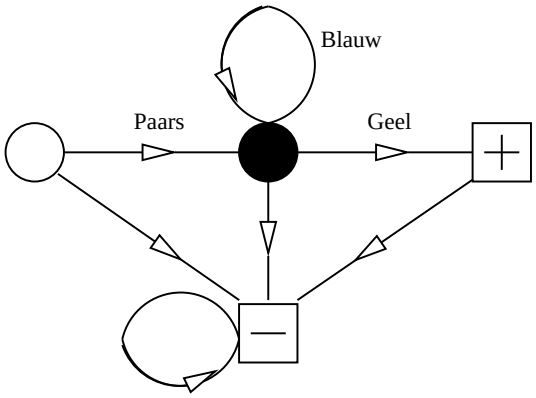
Kun je uitleggen waarom er een pijl loopt van de toestand Goed naar de toestand Fout?

☞ **Opgave 10**

Met de controle machine kun je makkelijk in de toestand Fout komen. Je kunt de toestand Fout dan niet meer verlaten. Waarom is dat niet vreemd?

✂ **Opgave 11**

Op de volgende pagina staat het schema van een controle machine getekend. Welke kettingen eindigen daarbij in de toestand Goed?



☞ **Opgave 12**

Maak zelf een machine die de volgende ketting controleert:

- De ketting moet beginnen met 1 gele kraal.
- Dan volgen er steeds drietallen: rood-paars-oranje. Er is tenminste één zo'n drietal.

Deel II: Wiskundige Machines

Omdat dit tenslotte een wiskundeboekje is, zullen we nu in plaats van kralenmachines getallenmachines maken. Kralenkettingen werden kraal voor kraal langer, nu gaat het met een bewerking en een getal. Bijvoorbeeld $+3$ of $\times 6$ of -5. Op het idee van een bewerking komen we zo direct nog terug.

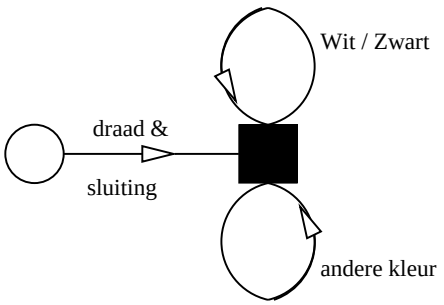
Kosten machines

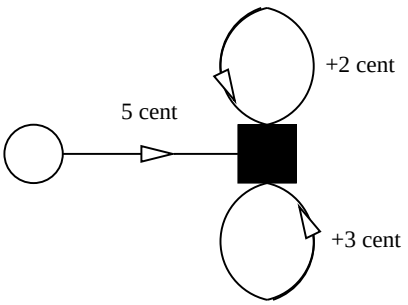
Met de machines konden veel meer kralenkettingen worden gemaakt en verkocht. Om alle kosten en rekeningen bij te houden was er de financiële administratie. Daar werd uitgerekend hoe veel een ketting moest kosten. Daarvoor gebruikte men een heel simpel systeem. Een ketting heeft een startprijs (voor de draad en de sluiting) en een prijs per kraal. De startprijs was 5 cent. Witte en zwarte kralen kostten 2 cent, andere kleuren 3 cent.

☞ **Opgave 13**

Wat kostte de ketting rood-wit-blauw-rood-wit-blauw-oranje ?

Omdat de machines in de rest van de fabriek zo succesvol bleken, werden er ook bij de administratie machines ingevoerd. Deze kostenmachines werkten bijna net zoals de controlemachines. Je stopt een kralenketting in de machine en op een schermpje verschijnt hoe veel de ketting kost. In het volgende plaatje zie je hoe de machine er uit ziet. De machine doet de eerste stap zonder een kraal te tellen.





Daarna doet de machine per kraal een stap. Iedere stap die de machine doet verhoogt de kosten met het bedrag dat bij de pijl staat. Door de kralenketting door de machine te halen maak je eigenlijk een nieuw soort ketting:

$$getal + getal + \ldots + getal + getal$$

Als je deze ketting dan “uitrekent” krijg je de totale prijs van de ketting.

☞ **Opgave 14**

Hoe ziet de kostenketting eruit bij de ketting van de vorige opgave? Klopt de uitkomst?

De plus in de kostenketting geeft aan dat je de getallen moet optellen. De plus is een bewerking die je vertelt wat je moet doen: tel het getal rechts van de bewerking op bij de uitkomst van het deel aan de linkerkant. Andere bewerkingen zijn $-$ (aftrekken), $\times$ (vermenigvuldigen) en $\div$ (delen). Met deze bewerkingen kun je wiskundige kettingen maken:

$$10 \quad + \quad 54 \quad - \quad 13 \quad \times \quad 4 \quad - \quad 6 \quad \div \quad 2 \quad + \quad 89$$

Om zo'n ketting uit te rekenen begin je aan de linkerkant en ga je de ketting stap voor stap langs. De volgorde is hierbij dus zeer belangrijk:

☞ **Opgave 15**

Reken de wiskundige ketting van hierboven eens op twee manieren uit:

1. Van links naar rechts als een wiskundige ketting
2. Volgens de regels van Meneer Van Dale Wacht Op Antwoord (vermenigvuldigen en delen gaat voor optellen en aftrekken).

Bij het uitrekenen als een ketting gebruik je dus steeds de uitkomst van het voorafgaande deel van de ketting: je rekent verder met de uitkomst van het beginstuk. Probeer nu zelf eens een paar wiskundige kettingen te maken.

✂ **Opgave 16**

Maak nu zelf een wiskundige ketting. Je begint met het getal 3 en er moet uiteindelijk 9 uitkomen. De extra moeilijkheid is dat je alleen de bewerkingen $+$ en $\times$ mag gebruiken. Zijn er nog meer mogelijkheden om dezelfde uitkomst te krijgen, als je met 3 moet beginnen?

★✂ **Opgave 17**

Bekijk de machine waarbij iedere keer 7 bij de uitkomst wordt opgeteld (bewerking +7) en je steeds het laatste cijfer van de uitkomst neemt. Bij 5 +7 is de uitkomst bijvoorbeeld 12, maar je kijkt alleen naar het laatste cijfer, dus 2.

Begin met het getal 5 en kijk eens naar de lijst van alle opvolgende uitkomsten. Kun je een patroon ontdekken in deze ketting? Zie je dat patroon ook als je met een ander getal begint?

Bonus opgaven en grafieken

In de wiskundige wereld heten machines waar je een getal moet invoeren ookwel functies. Een functie is dus iets waar je een invoer instopt en dan komst er een uitkomst uit. Je kunt er ook een schema van tekenen: Kijk nu eens naar de functie $[\times 2 + 1]$. Hiermee bedoelen we een functie die de invoer eerst

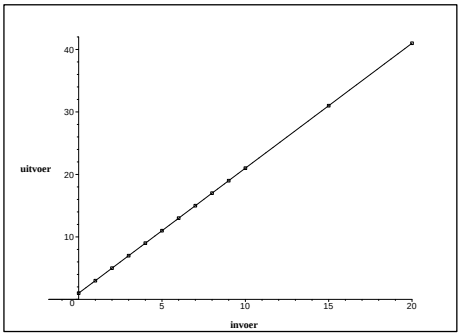
vermenigvuldigd met 2. Bij de uitkomst van die vermenigvuldiging wordt dan nog 1 opgeteld. In de volgende tabel staat de uitkomst bij verschillende invoer:

☞ **Opgave 18**

Maak de tabel zelf af.

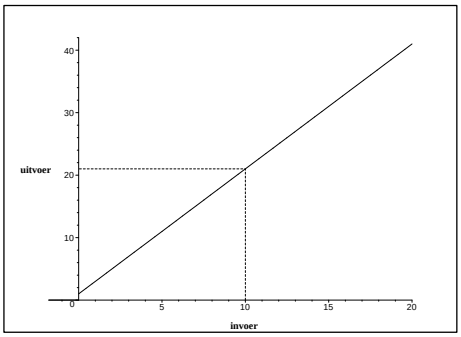
invoer	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20
uitvoer	1	3	5	7									

Je kunt de uitkomsten bij de verschillende waarden van de invoer ook in een plaatje weergeven. Zo'n plaatje noemen we een grafiek. Van links naar rechts geef je dan de verschillende waarden aan van de invoer. De hoogte van de grafiek geeft dan aan hoe groot de uitkomst is: hoe hoger de lijn, hoe hoger de uitkomst.



De waarden uit de tabel kun je terugvinden in het plaatje als de blokjes op de lijn. We hebben ook de uitvoer aangegeven voor alle invoeren die tussen de waarden van de tabel inliggen. Zo krijg je een mooie doorgetrokken lijn.

Zoek op de invoer-as (onderste lijn) naar de waarde van de invoer die je wilt gebruiken. Ga nu recht naar boven tot je de grafiek kruist. Ga vanaf dat punt naar links tot je de uitvoer-as (verticale lijn) raakt: daar staat de uitkomst die hoort bij die invoer.



Opgave 19

Teken de grafiek die hoort bij in volgende tabel. Kun je ook verzinnen welke functie bij deze tabel hoort?

invoer	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
uitvoer	2	6	10	14	18	22	26	30	34	38

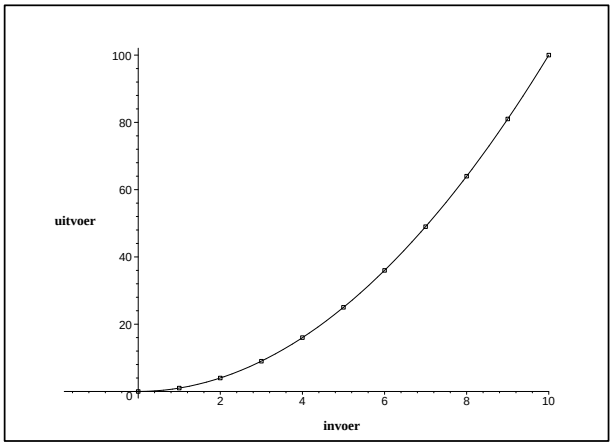
★ Opgave 20

Teken de grafiek die hoort bij in volgende tabel. Kun je ook verzinnen welke functie bij deze tabel hoort?

invoer	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
uitvoer	32	29	26	23	20	17	14	11	8	5

★☞ Opgave 21

Kun je verzinnen welke functie bij de onderstaande grafiek hoort? Vul anders eerst de tabel in.



invoer	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
uitvoer											

★☞ Opgave 22

Verzin zelf een functie en teken deze.

★☞ **Opgave 23**

Maak en teken een functie waarvoor geldt

invoer	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
uitvoer	0	3	8	15	24	35				