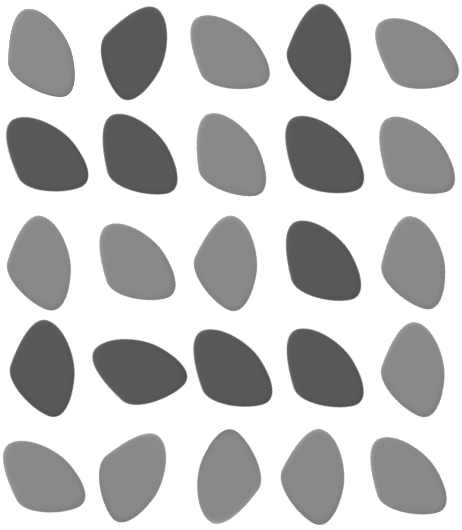
Oplossingen bij: Getalfiguren

Guit-Jan Ridderbos



vierkant wiskunde

Stichting Vierkant voor Wiskunde

Oplossingen

Vraag 1
In de eerste ronde worden er 6 vragen gesteld.

Vraag 2
In alle rondes samen worden er $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$ vragen gesteld.

Vraag 3
Bij 10 rondes worden er $1 + 2 + \ldots + 10 = 55$ vragen gesteld. Bij 100 rondes worden er 5050 vragen gesteld. In vraag 6 wordt er voor deze rekensommen een formule afgeleid.

Vraag 4
Zie de figuur op pagina 2.

Vraag 5

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T_n	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55

Vraag 6
In het plaatje wordt het getal T_n 2 keer weergegeven en dat levert een rechthoek op die n rondjes hoog en $n + 1$ rondjes breed is. Het aantal rondjes in de figuur is dus $n(n + 1)$. Dit is kennelijk gelijk aan $2T_n$, dus:

$$T_n = {}^1\!/_2 \cdot n(n + 1).$$

Vraag 7

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \ldots + 100 &= T_{100} \\ &= {}^1\!/_2 \cdot 100 \cdot 101 = 5050. \end{aligned}$$

Vraag 8
De ingevulde tabel ziet er als volgt uit:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T_n	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
$T_{n-1} + T_n$	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

De getallen op de onderste rij zijn allemaal kwadraten.

Vraag 9
In het plaatje zie je 2 driehoeken die samen een vierkant vormen. De driehoeken stellen 2 opeenvolgende driehoeksgetallen voor. De som van deze 2 driehoeksgetallen is dus gelijk aan de oppervlakte van het vierkant, en dat is een kwadraat.

Vraag 10

$$\begin{aligned} T_{n-1} + T_n &= {}^1\!/_2 \cdot (n-1)n + {}^1\!/_2 \cdot n(n+1) \\ &= {}^1\!/_2 \cdot n\big((n-1) + (n+1)\big) \\ &= {}^1\!/_2 \cdot n \cdot 2n \\ &= n^2. \end{aligned}$$

Vraag 11
Het plaatje staat in de hint bij deze vraag, als we de formule gebruiken dan lukt het ook. Immers, als T een driehoeksgetal is, dan is het van de vorm ${}^1\!/_2 \cdot n(n+1)$, voor zekere n, en dan geldt:

$$\begin{aligned} 8T + 1 &= \frac{8 \cdot n(n+1)}{2} + 1 \\ &= 4n(n+1) + 1 \\ &= 4n^2 + 4n + 1 \\ &= (2n+1)^2. \end{aligned}$$

Die laatste uitdrukking is inderdaad een kwadraat.

Vraag 12
Bekijk hiervoor het plaatje in de hint bij deze vraag. In het plaatje zie je hoe 9 driehoeken (+1) een grotere driehoek vormen.

Vraag 13
Het getal k is gelijk aan $3n + 1$, immers

$$\begin{aligned} 9T_n + 1 = \frac{9n(n+1)}{2} + 1 &= \frac{9n(n+1) + 2}{2} \\ &= \frac{9n^2 + 9n + 2}{2} \\ &= \frac{(3n+1)(3n+2)}{2} = T_{3n+1}. \end{aligned}$$

Vraag 14
Het feit dat $1 + 9 + \ldots + 9^n$ een driehoeksgetal is, volgt door het argument uit de vraag herhaaldelijk toe te passen.

Vraag 15

a) $8R + 1 = m^2$ geeft:

$$R = \frac{m^2 - 1}{8} = \frac{(m-1)(m+1)}{8}.$$

b) Aangezien R een geheel getal is, is $(m-1)(m+1)$ deelbaar door 8. Het getal $(m-1)(m+1)$ is dus zeker even. Verder merken we op dat $m-1$ en $m+1$ ofwel allebei even, ofwel allebei oneven zijn. Omdat het product van oneven getallen weer oneven is, moet er dus wel gelden dat $m-1$ en $m+1$ allebei even zijn. Dit kan alleen maar als m oneven is.

c) Met $m = 2k + 1$, volgt

$$\begin{aligned} R = \frac{(m-1)(m+1)}{2} &= \frac{(2k)(2k+2)}{8} \\ &= \frac{4k(k+1)}{8} = \frac{k(k+1)}{2}. \end{aligned}$$

Oftewel, $R = T_k$.

Vraag 16

a) Als je de gegeven vergelijkingen van elkaar afhaalt, dan krijg je dat $8R$ gelijk is aan $9^{n+1} - 1$. Door de 1 naar de andere kant van de vergelijking te halen, krijg je nu dat $8R + 1$ gelijk is aan 9^{n+1}.

b) Omdat $9 = 3^2$, geldt er dat $9^{n+1} = (3^2)^{n+1} = (3^{n+1})^2$. Het getal $8R + 1$ is dus een een kwadraat. Nu volgt uit vraag 15 dat R een driehoeksgetal is.

Vraag 17

a) T_m is gelijk aan $\frac{1}{2} \cdot m(m+1)$. Oftewel,

$$\begin{aligned} 9R + 1 &= \frac{m(m+1)}{2}. \\ \text{en dus:} \quad 9R &= \frac{m(m+1)}{2} - 1 \\ &= \frac{m(m+1) - 2}{2} \\ &= \frac{m^2 + m - 2}{2} \\ &= \frac{(m-1)(m+2)}{2}. \\ \text{Hieruit volgt:} \quad R &= \frac{(m-1)(m+2)}{18}. \end{aligned}$$

b)

$$2R = \frac{(m-1)(m+2)}{9}.$$

Vraag 18
De ingevulde tabel ziet er als volgt uit:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
O_n	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

Het lijkt er dus op dat de som van de eerste n oneven getallen gelijk is aan n^2.

Vraag 19
In het plaatje zie je hoe je oneven getallen bij elkaar kunt leggen om een vierkant te vormen. Omdat de oppervlakte van een vierkant een kwadraat is, volgt hieruit dat een som van oneven getallen een kwadraat oplevert.

Vraag 20

a) Merk op dat

$$E_n = 2 + 4 + \ldots + (2n) = 2(1 + 2 + \ldots + n) = 2T_n.$$

b) Merk op dat

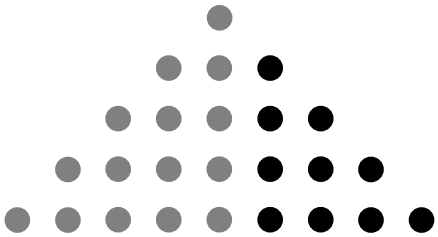
$$\begin{aligned} T_{2n} &= 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + (2n-1) + (2n) \\ &= \big(1 + 3 + \ldots + (2n-1)\big) + \big(2 + 4 + \ldots + (2n)\big) \\ &= O_n + E_n. \end{aligned}$$

Gebruik nu het feit dat $E_n = 2T_n$ om te concluderen dat $T_{2n} = O_n + 2T_n$. Hieruit volgt dat $O_n = T_{2n} - 2T_n$.

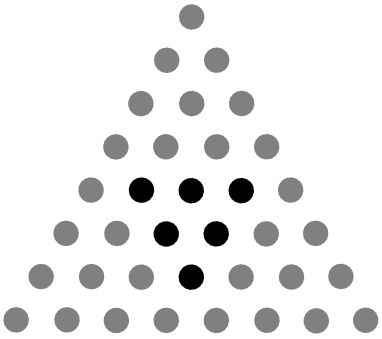
c) Eerst merken we op dat $2T_n = n(n+1)$ en $T_{2n} = \frac{(2n)(2n+1)}{2} = n(2n+1)$. Nu gebruiken we de formule uit het vorige onderdeel.

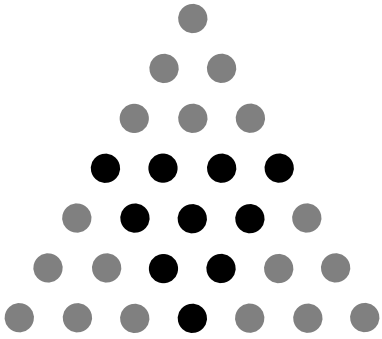
$$\begin{aligned} O_n &= T_{2n} - 2T_n \\ &= n(2n+1) - n(n+1) \\ &= n(2n+1-n-1) \\ &= n^2. \end{aligned}$$

Vraag 21
In het plaatje hieronder zie je twee opeenvolgende driehoeksgetallen naast elkaar getekend. Op de rijen die zo ontstaan, staan de oneven getallen in oplopende volgorde.



Vraag 22
De plaatjes die hierbij horen zien er als volgt uit:





Vraag 23
Voor de eerste gelijkheid:

$$\begin{aligned} 3T_{n-1} + T_n &= \frac{3(n-1)n}{2} + \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{3(n-1)n + (n+1)n}{2} \\ &= \frac{\big(3(n-1) + (n+1)\big)n}{2} \\ &= \frac{(4n-2)n}{2} \\ &= \frac{(2n-1)(2n)}{2} = T_{2n-1}. \end{aligned}$$

En voor de tweede:

$$\begin{aligned} T_{n-1} + 3T_n &= \frac{(n-1)n}{2} + \frac{3n(n+1)}{2} \\ &= \frac{\big((n-1) + 3(n+1)\big)n}{2} \\ &= \frac{(4n+2)n}{2} \\ &= \frac{2n(2n+1)}{2} = T_{2n}. \end{aligned}$$

Vraag 24
Als je de vergelijkingen bij elkaar optelt, dan krijg je $(a+b)(T_{n-1}+T_n) = T_{cn-1}+T_{cn}$. Hieruit volgt dus weer dat $(a+b)n^2 = (cn)^2$, oftewel $a+b = c^2$.

Als je vervolgens de vergelijkingen van elkaar aftrekt, dan geeft dit $(b-a)(T_n - T_{n-1}) = T_{cn} - T_{cn-1}$. Het verschil tussen T_n en T_{n-1} is n en evenzo is het verschil tussen T_{cn} en T_{cn-1} gelijk aan cn. Dit geeft dus uiteindelijk: $(b-a)n = cn$, oftewel $b-a = c$.

We hebben nu de volgende voorwaarden gevonden:

$$\begin{aligned} b+a &= c^2, \\ b-a &= c. \end{aligned}$$

Vraag 25
Voor de eerste gelijkheid:

$$\begin{aligned} T_k \cdot T_{n-1} + T_{k-1} \cdot T_n &= \frac{k(k+1)\cdot(n-1)n}{4} + \frac{(k-1)k \cdot n(n+1)}{4} \\ &= \frac{\big((k+1)(n-1) + (k-1)(n+1)\big)\cdot kn}{4} \\ &= \frac{(kn+n-1-1+kn-n+k-1)kn}{4} \\ &= \frac{2(kn-1)(kn)}{4} \\ &= \frac{(kn-1)(kn)}{2} = T_{kn-1}. \end{aligned}$$

En voor de tweede gelijkheid:

$$\begin{aligned} T_{k-1} \cdot T_{n-1} + T_k \cdot T_n &= \frac{(k-1)k \cdot (n-1)n}{4} + \frac{k(k+1) \cdot n(n+1)}{4} \\ &= \frac{\big((k-1)(n-1) + (k+1)(n+1)\big) \cdot kn}{4} \\ &= \frac{(kn - n - k + 1 + kn + n + k + 1) \cdot kn}{4} \\ &= \frac{2(kn+1)kn}{4} \\ &= \frac{kn(kn+1)}{2} = T_{kn}. \end{aligned}$$

Als we dit vergelijken met de vorige vraag dan hebben we de volgende waarden voor a, b en c gebruikt:

$$\begin{aligned} a &= T_k \\ b &= T_{k-1} \\ c &= k \end{aligned}$$

Dit klopt inderdaad met de condities die we gevonden hebben, want in dit geval geldt:

$$\begin{aligned} a + b &= T_k + T_{k-1} = k^2 = c^2, \\ a - b &= T_k - T_{k-1} = k = c. \end{aligned}$$

Vraag 26

Als je in vraag 25 $k = 2$ neemt, dan krijg je de formules uit vraag 23 want $T_2 = 3$ en $T_1 = 1$.

Vraag 27

Neem $k = n$ in de formules uit vraag 25.

Vraag 28

Waar mogelijk staat hieronder een oplossing. **NB:** Voor sommige getallen zijn er

meerdere mogelijkheden, maar we geven er telkens hooguit één.

$$
\begin{array}{rcl}
1 &=& \text{✘} \\
2 &=& \text{✘} \\
3 &=& 1+2 \\
4 &=& \text{✘} \\
5 &=& 2+3 \\
6 &=& 1+2+3 \\
7 &=& 3+4 \\
8 &=& \text{✘} \\
9 &=& 4+5 \\
10 &=& 1+2+3+4 \\
11 &=& 5+6 \\
12 &=& 3+4+5 \\
13 &=& 6+7 \\
14 &=& 2+3+4+5 \\
15 &=& 4+5+6 \\
16 &=& \text{✘}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
17 &=& 8+9 \\
18 &=& 3+4+5+6 \\
19 &=& 9+10 \\
20 &=& 2+3+4+5+6 \\
21 &=& 10+11 \\
22 &=& 4+5+6+7 \\
23 &=& 11+12 \\
24 &=& 7+8+9 \\
25 &=& 12+13 \\
26 &=& 5+6+7+8 \\
27 &=& 13+14 \\
28 &=& 1+2+3+4+5+6+7 \\
29 &=& 14+15 \\
30 &=& 9+10+11 \\
31 &=& 15+16 \\
32 &=& \text{✘}
\end{array}
$$

Vraag 30

$$
\begin{array}{rcl}
1+2 &=& S_{1,1} \\
1+2+3 &=& S_{1,2} \\
3+4+5 &=& S_{3,2} \\
3+4+5+6 &=& S_{3,3} \\
7+8+9 &=& S_{7,2}
\end{array}
$$

Vraag 31

Het eerste plaatje geeft $S_{n,k}$ weer als de som van een rechthoek en een driehoek. De rechthoek heeft grootte $n(k+1)$ en de driehoek hoort bij T_k. Bij elkaar opgeteld geeft dit;

$$
\begin{aligned}
S_{n,k} &= n(k+1) + T_k \\
&= \frac{2n(k+1)}{2} + \frac{k(k+1)}{2} \\
&= \frac{(2n+k)(k+1)}{2}.
\end{aligned}
$$

Deze formule kun je ook afleiden door het plaatje te verdubbelen om een rechthoek te krijgen van hoogte $k+1$ en breedte $n+k+n = 2n+k$.

Het tweede plaatje geeft $S_{n,k}$ weer als het verschil tussen twee driehoeksgetallen.

Deze driehoeksgetallen zijn T_{n+k} en T_{n-1}, dit geeft

$$\begin{aligned} S_{n,k} &= T_{n+k} - T_{n-1} \\ &= \frac{(n+k)(n+k+1)}{2} - \frac{(n-1)n}{2} \\ &= \frac{(n+k)(k+1) + n(n+k) - n(n-1)}{2} \\ &= \frac{(n+k)(k+1) + n(n+k-(n-1))}{2} \\ &= \frac{(n+k)(k+1) + n(k+1)}{2} \\ &= \frac{(2n+k)(k+1)}{2}. \end{aligned}$$

Vraag 32
In vraag 31 hebben we afgeleid dat $S_{n,k}$ gelijk is aan $1/2 \cdot (2n+k)(k+1)$. Aan de hand van deze formule gaan we afleiden dat $S_{n,k}$ altijd deelbaar is door een oneven getal dat groter is dan 1. Hiertoe onderscheiden we 2 gevallen, namelijk het geval dat k even is en het geval dat k oneven is.
Als k even is, dan is $2n+k$ ook even en $k+1$ is oneven en groter dan 1. Omdat $2n+k$ even is, geldt er dat $1/2 \cdot (2n+k)$ een geheel getal is, en dus is $S_{n,k}$ een veelvoud van het oneven getal $k+1$.
Als k oneven is, dan is $k+1$ juist even en $2n+k$ is oneven en groter dan 1 (want k is groter dan 1). Net als in het vorige geval is $1/2 \cdot (k+1)$ een geheel getal en dus is $S_{n,k}$ een veelvoud van het oneven getal $2n+k$.
In beide gevallen zien we dat $S_{n,k}$ deelbaar is door een oneven getal groter dan 1. Hieruit volgt dat als een getal te schrijven is als de som van een rijtje opeenvolgende getallen het dan deelbaar is door een oneven getal groter dan 1.

Vraag 33
In de tabel van vraag 28 hebben we niets ingevuld bij de getallen 1, 2, 4, 8, 16 en 32. Deze getallen zijn precies de getallen die geen oneven delers hebben want het zijn allemaal machten van 2. Dit klopt dus met de bewering uit de vorige vraag.

Vraag 34
Neem $n = q - p$ en $k = 2p$. Dan geldt;

$$\begin{aligned} S_{n,k} = \frac{(2n+k)(k+1)}{2} &= \frac{(2(q-p)+2p)(2p+1)}{2} \\ &= \frac{2q(2p+1)}{2} = q(2p+1). \end{aligned}$$

Merk verder op dat $n \geq 0$ omdat $q \geq p$ en $k \geq 1$ omdat $p \geq 1$.

Vraag 35
Neem $k = 2q - 1$ en $n = p - q + 1$. Dan geldt;

$$S_{n,k} = \frac{(2n+k)(k+1)}{2} = \frac{(2(p-q+1)+2q-1)(2q-1+1)}{2}$$
$$= \frac{(2p+1)2q}{2} = (2p+1)q.$$

In dit geval geldt ook dat $n \geq 0$ omdat $p - q > 0$ en $k \geq 1$ omdat $q \geq 1$.

Vraag 36
Een getal is te schrijven als de som van een rijtje opeenvolgende getallen dan en slechts dan als dit getal deelbaar is door een oneven getal groter dan 1.

Vraag 37
De ingevulde driehoek staat in vraag 38.

Vraag 38
De som staat altijd direct links- of rechtsonder het laatste getal uit de diagonaal.

Vraag 39
De driehoeksgetallen komen voor op een diagonaal. Om de juiste diagonaal aan te wijzen, is het handig om ze te nummeren. Laten we de diagonaal waar allemaal 1-en op staan de 0^{de} diagonaal noemen. Dan bevat de 1^{ste} diagonaal de getallen $1, 2, 3,$ etc. Op de volgende diagonaal staan dan telkens sommen van de vorm $1+2+\ldots+n$ vanwege het hockeystick patroon, en dit zijn dus precies de driehoeksgetallen. De driehoeksgetallen staan dus op de tweede diagonaal.
Het is voor deze nummering van diagonalen trouwens niet van belang of je van linksboven naar beneden begint te tellen of van rechtsboven, omdat je dan dezelfde getallen op de diagonaal tegen zult komen.

Vraag 40
Je krijgt altijd een macht van 2.

Vraag 41
Je krijgt de rij

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$$

Elk getal in deze rij is telkens de som van de twee vorige getallen in de rij.

Vraag 44

a) Omdat een getal op een bepaalde rij 2 keer een bijdrage levert op de volgende rij, zal de som van de getallen op een volgende rij dus 2 keer zo groot zijn als de som van alle getallen op de rij ervoor.

b) De bovenste rij bestaat uit slechts één getal, namelijk het getal 1. Dit levert dus een som op van 1. De som van de getallen op de volgende rij is het dubbele hiervan, oftewel 2. De som op de rij hieronder is het dubbele van 2, oftewel $2 \times 2 = 4$. Door deze redenering herhaaldelijk toe te passen krijg je telkens sommen van de vorm $2 \times 2 \times \cdots \times 2$, en dit leveren machten van 2 op.

We kunnen nu ook precies zeggen *welke* macht van 2 we krijgen. Als we de bovenste rij de 0^{de} rij noemen, dan is de som van de getallen op de n^{de} rij precies gelijk aan 2^n.

Vraag 45
In een bepaald vakje van de driehoek staat precies het aantal routebeschrijvingen dat naar dat vakje leidt.

Vraag 46
De routebeschrijving is: **RLLRLL**. Dit is vanuit de fietser gezien.

Vraag 47
Met een routebeschrijving van lengte 10 kom je terecht in de 10^{de} rij. Met een routebeschrijving van lengte n kom je terecht in de n^{de} rij. Dit klopt trouwens ook voor $n = 0$, want een routebeschrijving van lengte 0 brengt je nergens naartoe en dan blijf je dus waar je begint en dat is de 0^{de} rij.

Vraag 48
De som van de getallen op de n^{de} rij is precies het aantal manieren waarop je op de n^{de} rij terecht kunt komen. Aangezien je alleen op de n^{de} rij terecht komt met een routebeschrijving van lengte n, is de som van de getallen op de n^{de} rij dus precies het aantal routebeschrijvingen van lengte n.

Vraag 49
Er zijn 2^n verschillende routebeschrijvingen van lengte n. In de vorige vraag hadden we al beredeneerd dat dit precies de som is van de getallen op de n^{de} rij in de driehoek van Pascal.

Vraag 51
Het getal sd_n is precies gelijk aan het aantal routebeschrijvingen dat uitkomt in de n^{de} semi-diagonaal. Alle routebeschrijvingen die uitkomen in de $(n+2)^{de}$ diagonaal kun je nu als volgt verkrijgen;

a) door een routebeschrijving te nemen die uitkomt in de n^{de} semi-diagonaal en er vervolgens een **L** achter te plakken, of

b) door een routebeschrijving te nemen die uitkomt in de $(n+1)^{ste}$ semi-diagonaal en er vervolgens een **R** achter te plakken.

Het aantal routebeschrijvingen dat uitkomt in de $(n+2)^{de}$ diagonaal is dus gelijk aan de som van het aantal routes dat uitkomt in de twee voorgaande diagonalen. Oftewel, $sd_{n+2} = sd_{n+1} + sd_n$.

Vraag 52

In vraag 39 hebben we bedacht op welke diagonaal de driehoeksgetallen voorkomen. Dat was de 2^{de} diagonaal. Dit levert het volgende op:

$$T_n = C_2^{n+1}$$

Vraag 54

a)

$$\begin{aligned}\binom{n}{0} &= \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{1 \cdot n!} \\ &= \frac{n!}{n!} = 1 \\ \binom{n}{n} &= \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!0!} \\ &= \frac{n!}{n! \cdot 1} = \frac{n!}{n!} = 1\end{aligned}$$

b) In de volgende afleiding gebruiken we een aantal keer het handige feit dat $k \cdot (k-1)!$ gelijk is aan $k!$.

$$\begin{aligned}\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} &= \frac{n!}{(r-1)!(n-(r-1))!} + \frac{n!}{r!(n-r)!} \\ &= \frac{r \cdot n!}{r \cdot (r-1)!(n-r+1)!} + \frac{(n-r+1) \cdot n!}{r!(n-r+1)(n-r)!} \\ &= \frac{r \cdot n!}{r!(n-r+1)!} + \frac{(n-r+1) \cdot n!}{r!(n-r+1)!} \\ &= \frac{\big(r + (n-r+1)\big)n!}{r!(n+1-r)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{r!(n+1-r)!} \\ &= \binom{n+1}{r}.\end{aligned}$$

Vraag 56

$$\begin{aligned} C_2^{n+1} &= \binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)!}{2!(n+1-2)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{2!(n-1)!} = \frac{n(n+1)}{2} \\ &= T_n \end{aligned}$$

Vraag 58

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P_n	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220

Vraag 59

Het getal k is gelijk aan n, dus $P_{n-1} + P_n = 1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$.

Vraag 60

Uit het plaatje blijkt dat $4P_n + 2P_{n+1} = (n+1)^2(n+2)$. Omdat P_{n+1} gelijk is aan $P_n + T_{n+1}$, staat hier dat $6P_n + 2T_{n+1}$ gelijk is aan $(n+1)^2(n+2)$, oftewel:

$$\begin{aligned} 6P_n &= (n+1)^2(n+2) - 2T_{n+1} \\ &= (n+1)^2(n+2) - (n+1)(n+2) \\ &= (n+1)(n+2)\big((n+1) - 1\big) \\ &= (n+1)(n+2)n. \end{aligned}$$

Hier staat dus dat P_n gelijk is aan $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

Vraag 61

We weten uit vraag 59 al dat de som van de eerste n kwadraten gelijk is aan $P_{n-1} + P_n$. Dit werken we uit met de formule;

$$\begin{aligned} P_{n-1} + P_n &= \frac{(n-1)n(n+1)}{6} + \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)\big((n-1) + (n+2)\big)}{6} \\ &= \frac{(2n+1)n(n+1)}{6}. \end{aligned}$$

Oftewel;

$$1 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{(2n+1)n(n+1)}{6}.$$

Vraag 62

a) We gebruiken de nummering uit vraag 39. De piramidegetallen staan dan op de 3^{de} diagonaal. De reden hiervoor is net als in vraag 39 het hockeystick patroon. Immers in die vraag hebben we gezien dat de driehoeksgetallen op de tweede diagonaal staan in de driehoek van Pascal. Dan staan er vanwege het hockeystick patroon op de 3^{de} diagonaal optelsommen van driehoeksgetallen, en dit zijn de piramidegetallen.

b) Omdat de piramide getallen op de 3^{de} diagonaal staan in de driehoek van Pascal, geldt er dat:

$$P_n = C_3^{n+2}.$$

c) In vraag 55 hebben we gevonden dat $C_r^n = \binom{n}{r}$, dus:

$$\begin{aligned} C_3^{n+2} &= \binom{n+2}{3} = \frac{(n+2)!}{3!(n-1)!} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \\ &= P_n \end{aligned}$$

Vraag 63

n	1	2	3	4	5	6
OK_n	1	10	35	84	165	286
EK_n	4	20	56	120	220	364

Vraag 64

In vraag 59 hebben we laten zien dat $P_{2n-1} + P_{2n} = 1^2 + 2^2 + \ldots + (2n)^2$, dus we krijgen:

$$\begin{aligned} P_{2n-1} + P_{2n} &= 1^2 + 2^2 + \ldots + (2n-1)^2 + (2n)^2 \\ &= \left(1^2 + 3^2 + \ldots + (2n-1)^2\right) + \left(2^2 + 4^2 + \ldots + (2n)^2\right) \\ &= OK_n + EK_n. \end{aligned}$$

Vraag 65

a) In vraag 9 hebben we afgeleid dat de som van opeenvolgende driehoeksgetallen een kwadraat is. We hebben daar gezien dat $T_2+T_3 = 3^2$, $T_4+T_5 = 5^2$, etc. Hieruit volgt dus:

$$\begin{aligned} P_{2n-1} &= T_1 + (T_2 + T_3) + (T_4 + T_5) + \cdots + (T_{2n-2} + T_{2n-1}) \\ &= 1 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 \\ &= OK_n. \end{aligned}$$

b) We gebruiken de formule uit vraag 60 om P_{2n-1} uit te rekenen.

$$\begin{aligned} OK_n &= P_{2n-1} \\ &= \frac{\big(2n-1\big)\big((2n-1)+1\big)\big((2n-1)+2\big)}{6} \\ &= \frac{(2n-1)(2n)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3} \\ &= \frac{n(4n^2-1)}{3} \\ &= \frac{4n^3-n}{3}. \end{aligned}$$

Vraag 66

a) In vraag 9 hebben we afgeleid dat de som van opeenvolgende driehoeksgetallen een kwadraat is. We hebben daar gezien dat $T_1+T_2 = 2^2$, $T_3+T_4 = 4^2$, etc. Hieruit volgt dus:

$$\begin{aligned} P_{2n} &= (T_1+T_2)+(T_3+T_4)+\cdots+(T_{2n-1}+T_{2n}) \\ &= 2^2+4^2+\ldots+(2n)^2 \\ &= EK_n. \end{aligned}$$

b) In de vorige vragen hebben we afgeleid dat $P_{2n-1}+P_{2n} = OK_n + EK_n$ en ook dat $P_{2n-1} = OK_n$. Als we deze formules samenvoegen, dan krijgen we:

$$P_{2n-1}+P_{2n} = P_{2n-1}+EK_n.$$

Als we P_{2n-1} aan beide kanten wegstrepen, dan staat hier dat $P_{2n} = EK_n$.

Vraag 67

n	1	2	3	4	5	6
$1^3+\ldots+n^3$	1	9	36	100	225	441

Vraag 69

Het plaatje bestaat uit een aantal stappen. In de eerste stap zie je het plaatje waarmee we een som van derde machten aangeven en in de laatste stap zie je het plaatje uit vraag 68. Deze twee grootheden zijn dus aan elkaar gelijk. Hieruit volgt dat $1^3+2^3+\ldots+n^3$ gelijk is aan $(T_n)^2$, oftewel:

$$1^3+2^3+\ldots+n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = {}^1\!/_4 \cdot (n^4+2n^3+n^2).$$

Vraag 70

a) $T_{n-1} = \frac{(n-1)n}{2}$, dus hieruit volgt dat:

$$\begin{aligned} 2nT_{n-1} &= 2n\frac{(n-1)n}{2} \\ &= (n-1)n^2. \end{aligned}$$

b) Aangezien $2nT_{n-1} = (n-1)n^2$, krijgen we

$$\begin{aligned} 2nT_{n-1} + n^2 &= (n-1)n^2 + n^2 \\ &= (n-1+n)n^2 = n^3. \end{aligned}$$

Vraag 71

Het plaatje geeft een vierkant weer met oppervlakte $(T_n)^2$. Het is verder opgebouwd uit figuren die dezelfde vorm hebben, één daarvan is gearceerd weergegeven. Deze vormen zijn telkens opgebouwd uit 3 componenten, namelijk 2 rechthoeken en een vierkant. De oppervlakte van deze 3 componenten is een derde macht. Dit volgt uit de vorige vraag omdat de oppervlakte van zo'n figuur gelijk is aan $2kT_{k-1} + k^2$, en dat is weer gelijk aan k^3 zoals we in de vorige vraag hebben gezien.
Het grote vierkant is dus opgebouwd uit alle derde machten van 1 tot en met n, en hieruit volgt dus dat

$$(T_n)^2 = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3.$$

Vraag 72

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
HP_n	1	5	15	35	70	126	210	330	495	715

Vraag 73

a) We gebruiken de nummering uit vraag 39. De hyperpiramidegetallen staan dan op de 4^{de} diagonaal. De reden hiervoor is net als in vraag 39 en vraag 62 het hockeystick patroon. Immers in die vragen hebben we gezien dat de piramidegetallen op de derde diagonaal staan in de driehoek van Pascal. Dan staan er vanwege het hockeystick patroon op de 4^{de} diagonaal optelsommen van piramidegetallen, en dit zijn de hyperpiramidegetallen.

b) Omdat de hyperpiramidegetallen op de 4^{de} diagonaal staan in de driehoek van Pascal, geldt er dat:

$$HP_n = C_4^{n+3}.$$

c) In vraag 55 hebben we gevonden dat $C_r^n = \binom{n}{r}$, dus:

$$HP_n = C_4^{n+3} = \frac{(n+3)!}{4!(n-1)!} = {}^1\!/_{24} \cdot n(n+1)(n+2)(n+3)$$

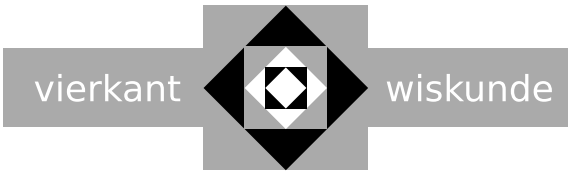
Vierkant zomerkampen

Vierkant voor Wiskunde is in 1994 opgericht om zomerkampen met wiskundige activiteiten te organiseren. Sindsdien zijn er elke zomer kampen met een wiskundig karakter voor kinderen vanaf tien jaar. Er zijn aparte kampen voor verschillende leeftijdscategorieën.
Je hoeft geen whizzkid te zijn om mee te gaan, maar je moet wel een liefhebber zijn van het oplossen van problemen en puzzels. Tijdens de kampen wordt een aantal onderwerpen met een wiskundig thema verkend, zoals veelvlakken, getallen, grafen, magische vierkanten, geheimschrift of verzamelingen. Over zo'n onderwerp ga je van alles uitzoeken, berekenen, bouwen en tekenen. Ook kun je een kunstwerk maken, gebaseerd op wiskunde, bijvoorbeeld een Escher-achtige tekening of een fractal. Je werkt in groepen van vijf of zes kinderen met twee begeleiders.

Verder is er natuurlijk veel tijd voor andere activiteiten, zoals sport, spelletjes, zwemmen en een dropping.

Je maakt zelf uit hoe diep je in een onderwerp duikt. Daarom is het kamp voor iedereen leuk en uitdagend. Ook wanneer je denkt dat je al erg veel van wiskunde weet, zul je merken dat er nog heel wat te ontdekken valt.

De kampen worden begeleid door een enthousiast team vrijwilligers, bestaande uit docenten en studenten wiskunde, onderzoekers en andere bèta's. Zij zetten zich elk jaar in om leuke, nieuwe activiteiten en uitdagende wiskundeproblemen te verzinnen. Zowel van de deelnemers als de begeleiders komt telkens een groot aantal de volgende zomer weer naar het kamp. De begeleiders kiezen ieder jaar weer nieuwe onderwerpen. Voor elk onderwerp wordt een werkboek geschreven waarmee de deelnemers aan de slag gaan.



De Stichting Vierkant voor Wiskunde wil voor jongeren mogelijkheden creëren om op een creatieve wijze met wiskunde om te gaan. Hiertoe organiseert Vierkant zomerkampen, puzzelmarkten en wiskundeclubs. Daarnaast geeft Vierkant wisschriften en doeboeken uit. Wiskunde kan voor jongeren een plezierige intellectuele uitdaging zijn. Zij kunnen genieten van hun ontdekkingen en oefenen spelenderwijs het logisch en abstract denken. Vierkant richt zich met haar activiteiten op jongeren vanaf tien jaar.

In de reeks Vierkant doeboeken verschenen reeds:

1. Spelen op een slimme manier: Zs. Ruttkay
2. Tegels leggen, en dergelijke: F. Göbel
3. Veelvlakken: A. W. Grootendorst, M. H. J. Pijls, Zs. Ruttkay
4. Kun je deze oplossen?: L. Barendregt, W. Oudshoorn, Zs. Ruttkay
5. Van plattegrond tot scharrelkip: F. Göbel
7. Fibonacci-getallen en de gulden snede: Zs. Ruttkay, E. C. Buissant des Amorie
8. Magische vierkanten: A. A. J. Lefeber
9. De veelzijdigheid van vierkanten: R. Roelofs, F. Göbel
10. Durf je deze aan te pakken?: C. Wildhagen
11. Knopen: F. Akveld, M. Akveld
13. Met passer en latje: Zs. Ruttkay
14. Getallen: A. Heinis, H. Brandsma
15. Puzzelkalender 1999: F. Göbel, R. Roelofs
16. Puzzels voor junioren: C. Wildhagen
17. Zelf Escher-achtige vlakvullingen ontwerpen: A. Kolkman, M. Pijls
18. Het getal π: E. C. Buissant des Amorie
19. Lijnen in perspectief: F. van der Blij, A. Carsouw
20. Puzzelkalender 2000: R. Roelofs, F. Göbel
21. Kijk op kegelsneden: R. W. van der Waall, L. De Clerck
22. Cryptografie: M. P. Alberts, J. C. C. Langeveld
23. Puzzelkalender 2005
24. Grafen: J. Bouw
25. Getalfiguren: G. F. Ridderbos

Naast doeboeken geeft Vierkant ook een reeks wisschriften uit, speciaal voor kinderen van tien tot dertien jaar. De doeboeken en wisschriften kunnen worden besteld via onze website of bij het secretariaat van Vierkant:

Stichting Vierkant voor Wiskunde
Universiteit Leiden
Mathematisch Instituut
Niels Bohrweg 1
2333 CA Leiden

Telefoon: 071 - 5277129
E-mail: info@vierkantvoorwiskunde.nl
Internet: www.vierkantvoorwiskunde.nl