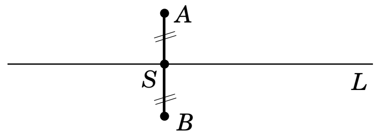
Antwoorden Doeboek 21

Kijk op kegelsneden

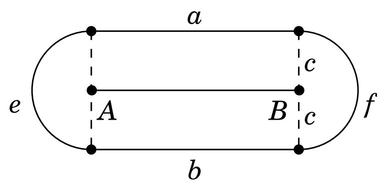
Rob van der Waall en Liesbeth de Clerck

1 Nee, alle punten die 12 centimeter van het midden liggen, liggen op de cirkel.

2 De gevraagde figuur bestaat uit de lijn L die zich “oneindig lang” van “links naar rechts” uitstrekt, zodanig dat AB loodrecht op L staat, terwijl het midden S van AB op L ligt.



3 Hier zijn a en b twee lijnstukken, elk evenlang als AB en ieder liggend op afstand c van AB, met daarbij de halve cirkels e en f achtereenvolgens met “middelpunten” A en B, elk met straal c .



4 a) De afstand tot O van elk punt binnen een cirkel met straal r, is kleiner dan r.
b) Elk punt buiten zo’n cirkel heeft tot O een afstand groter dan r.

5 Een rechte lijn snijdt een cirkel in nul, in één of in twee punten.

6 Als de punaises steeds dichter bij elkaar staan,zal de bijbehorende ellips steeds meer gaan lijken op een cirkel. Als ze uiteindelijk “samenvallen” is zo’n ellips een cirkel geworden.

7 In het algemeen zie je een ellips. Er zijn twee bizondere gevallen. Als je loodrecht van boven in de fles kijkt die op tafel staat, dan zie je een cirkel. Als je tegen de zijkant van de fles kijkt,met je oog in hetzelfde vlak als het wateroppervlak, dan zie je een lijnstuk. Als de fles of mok van boven dicht is, terwijl alles doorzichtig is, en je de fles scheef houdt, ga dan zelf na wat je ziet!

8 a) De punten A_1 en A_2 blijven op hun plaats, het punt B_2 loopt “naar boven” en het punt B_1 loopt “naar beneden” tot het moment waarop B_1B_2 evenlang is als A_1A_2 . Het midden van B_1B_2 is steeds het punt O. Uiteindelijk gaat de ellips over in een cirkel met straal a. A_1, A_2, B_1 en B_2 liggen dan op die cirkel.
b) De ellips plat van boven en van onderen steeds verder af totdat de ellips uiteindelijk samenvalt met A_1A_2; dit laatste is het geval voor c = a.

9 De punten A_1 en A_2 liggen op de ellips. Er geldt: $F_1A_2 + F_2A_2 = (c + a) + (a - c) = 2a = (a - c) + (a + c) = F_1A_1 + F_2A_1$. Hierbij is c de afstand van O tot F_2 (c is ook de afstand van O tot F_1) . De constante waarvan sprake is in de tekst voor Afbeelding 5, is dus gelijk aan 2a. Als we de punten waarin de twee cirkels elkaar snijden B_1 en B_2 noemen, dan geldt $F_1B_1 + F_2B_1 = a + a = F_1B_2 + F_2B_2$. Hieruit blijkt dat B_1 en B_2 op de ellips liggen, omdat ze elk zo’n ‘P’ zijn zoals in de tekst voor Afbeelding 5.

10 Zet de passerpunt in F_1 en construeer de cirkel die als straal A_1X heeft. Doe hetzelfde ten opzichte van F_2 met A_2X. De cirkels snijden elkaar in twee punten; noem ze C en D. Om aan te tonen dat C op de ellips ligt, moeten we laten zien dat $F_1C + F_2C = 2a = F_1A_2 + F_2A_2 = F_1A_1 + F_2A_1$ geldt. (Zie ook de oplossing van opgave 9.)

Welnu, $F_1C = A_1X$ en $F_2C = A_2X$ is gegeven. Dus, als we met x de lengte van OX aangeven, vinden we: $F_1C + F_2C = A1X + XA2 = (a + x) + (a - x) = 2a$, waaruit volgt dat C op de ellips ligt. Hetzelfde geldt voor D; merk op dat $F_1D = F_1C$ en dat $F_2D = F_2C$. Om de punten E en G te vinden herhalen we de constructie met ditmaal F_1 als middelpunt van de cirkel met straat A_2X en daarna met F_2 als middelpunt van de cirkel met straat A_1X. Noem de gevonden snijpunten E en G. Omdat $F_1E + F_2E = XA_2 + A_1X = F_1G + F_2G = (a - x) + (a + x) = 2a$, volgt dat E en G op de ellips liggen.

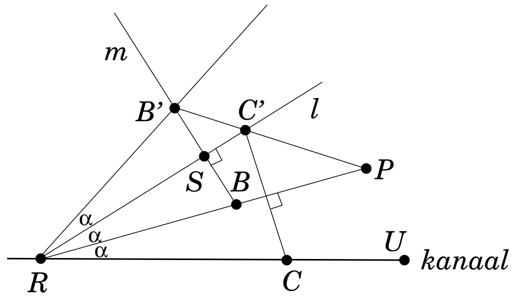
11 We geven de constructie schetsmatig aan. Construeer een lijn. Markeer daarop een punt K. Construeer de punten L en M op die lijn zó, dat KL = F_1P en LM = PF_2. Construeer het midden X van KM en het midden O van F_1F_2 . Construeer het punt A_2 op het verlengde van OF_2 en het punt A_1 op het verlengde van OF_1 zó, dat A_1O = XM = OA_2. De lijn door de gevraagde punten B_1 en B_2 staat loodrecht op F_1F_2; die lijnen snijden elkaar in O.

Bedenk nu dat vanwege de definitie van ellips $F_1B_2 + B_2F_2 = F_1A_1 + A_1F_2 = F_1A_2 + A_2F_2 = 2a$ geldt en dat $F_1B_2 = B_2F_2 = F_1B_1 = B_1F_2 = a$ geldt; verder is a gelijk aan XM . Cirkel nu dus twee cirkels om met als middelpunten F_1 en F_2 en ieder met straal XM (= a). De snijpunten zijn B_1 en B_2.

12 $A_1A_2 = F_1P + PF_2 = 28$; B_1B_2 is twee keer zolang als OB_2. Merk op dat $F_1B_2 = B_2F_2 = a = OA_2 = OA_1 = 14$ (in de terminologie van Afbeelding 5). Pas de stelling van Pythagoras toe op de driehoek B_2 O F_1 . Er volgt dat $OB_2 = \sqrt{(14^2 - 7^2)}$, wat hetzelfde is als $7(\sqrt{3})$. Dus B_1B_2 is $14(\sqrt{3})$.

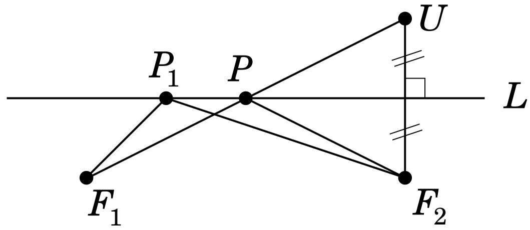
13 $F_1P + PF_2 = (F_1P_1 + P_1P) + PF_2 = F_1P_1 + (P_1P + PF_2)$, hetgeen groter is dan $F_1P_1 + P_1F_2$.
$F_1P_2 + P_2F_2 = (F_1P + PP_2) + P_2F_2 = F_1P + (PP_2 + P_2F_2)$, hetgeen groter is dan $F_1P + PF_2$.

14 Opgepast! We moeten namelijk aannemen dat de boer het kanaal niet kan oversteken (vergelijk deze opmerking met de oplossing van opgave 15) . De boer moet wat voorbereidende werkzaamheden doen. Met een lint dat hij strak trekt van punt P langs het punt B bepaalt de boer het punt R. Met behulp van passer en liniaal paalt hij de hoek af bij R die evengroot is als de hoek BRU (U is het punt “rechts” aan het kanaal), en trekt aldus de lijn l. Nu construeert de boer de lijn m door B loodrecht op l. Het snijpunt van l en m heet S. Hij past dan de afstand van BS af op m aan de andere kant van de lijn l. Het gevonden punt heet B’. De boer verbindt B’ met P (bv. door middel van een strakgetrokken lint). Het snijpunt van B’P met l heet C’. Merk nu op dat hoek B’RS = hoek SRB = hoek BRU.



Hij construeert nu door C’ een (kort) lijnstuk loodrecht op RP en verlengt dat lijnstuk tot het bij het kanaal komt, alwaar hij punt C markeert. Hiermee zijn de voorbereidingen voltooid. De trajekt van de weg van B naar C samen met die van C naar P geeft je de gevraagde kortste weg. In de figuur bij de oplossing van opgave 15 zie je, waarom bovenstaande constructie werkt.

15 Construeer de lijn door F_2 die loodrecht op de lijn L staat. Het snijpunt van L met die lijn heet T. Op het verlengde van F_2T wordt aan de andere kant van L het punt U geconstrueerd zo’, dat TU = F_2T . Trek de lijn die door U en F_1 gaat. Het snijpunt van die lijn met L is het gevraagde punt P. Immers, voor elk ander punt P_1 op L geldt, dat $F_1P_1 + P_1F_2 = F_1P_1 + P_1U$ groter is dan $F_1U = F_1P + PU = F_1P + PF_2$; hierbij is gebruik gemaakt van de driehoeksongelijkheid voor de driehoek F_1 P_1 U . De constructie in de oplossing van opgave 14 is nu niet lastig meer te begrijpen; zie de FIGUREN.



16 Een rechte lijn heeft met een ellips nul, één of twee punten gemeenschappelijk.

17 Gebruik de resultaten van de opgaven 13 en 15. Er werd aangetoond dat het (raak)punt R waar de lijn L aan de ellips raakt, de eigenschap $F_1R + RF_2 \leq F_1U + UF_2$ heeft voor elk ander punt U op de lijn L. Het punt R is dan niets anders dan het punt P uit opgave 15. En dus geldt $F_1P + PF_2 = 2a$ in de terminologie uit het begin van het tweede hoofdstuk, zoals we inmiddels elders ook al eerder zagen.

18 Zie de constructie uitgevoerd in opgave 15; gebruik de oplossing van opgave 17.

19 Met behulp van passer en liniaal delen we de hoek F_1 P F_2 middendoor en trekken we de deellijn PV, (deellijn is hetzelfde als bissectrice) met punt V op F_1F_2 (dus hoek F_1PV = hoek F_2PV). Construeer de lijn L door P die loodrecht op PV staat. De lijn L raakt in P aan de ellips zoals als volgt valt in te zien:

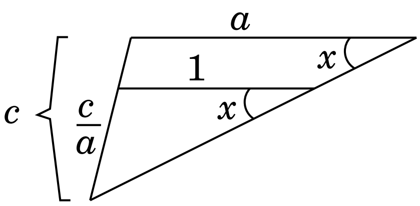
Construeer de lijn M door F_2 die loodrecht op L staat. Het snijpunt van L en m heet D. Met E geven we het snijpunt van m en de lijn door F_1 en P aan.

Er geldt hoek EPB = (90 graden - hoek F_1PV) = (90 graden - hoek VPF_2) = hoek F_2PB . En dan volgt, hoek PED = (90 graden - hoek EPD) = (90 graden - hoek F_2PB) = hoek PF_2B. Dus de driehoeken EPD en F_2PD zijn congruent (populair gezegd: gelijk bij uitknippen). Dus, F_2D = DE. We bevinden ons nu in de oplossingen van de opgaven 15, 17 en 18 . En daarom is L de raaklijn in P aan de ellips.

20 Construeer het spiegelpunt S van het punt F_2 ten opzichte van de gegeven raaklijn. Het snijpunt van die raaklijn met de lijn door S en F_1 heet P. In de vorige opgaven zagen we al dat P het raakpunt van de gegeven lijn aan de ellips is. Ook weten we al dat dan F_1P + PF_2 = 2a = (twee keer de lengte van OA_2) = (twee keer de lengte van OA_1) . Zo ligt de positie van A_2 (en die van A_1) vast. Het midden van F_1F_2 heet O en is te construeren. Construeer nu de lijn door O die loodrecht op de lange as staat. Construeer een punt op die lijn zodanig, dat de afstand van F_2 tot dat punt gelijk is aan de helft van de som der afstanden F_1P en PF_2. Er zijn twee van dergelijke punten; het zijn de gezochte punten B_1 en B_2 . F1P + (PP2 + P2F2) , hetgeen groter is dan F1P + PF2.

21 Construeer de lijn die door F_2 gaat en tevens loodrecht staat op de gegeven lijn. Construeer de cirkel met middelpunt F_1 en met straal A_1A_2. Die cirkel snijdt de geconstrueerde lijn in twee punten C_1 en C_2. Beschouw het midden M van F_2C_1. Construeer de lijn die door M gaat en tevens loodrecht staat op F_2C_1 . Die lijn is één van de twee gevraagde raaklijnen *evenwijdig* aan de gegeven lijn in Afbeelding 15. Evenzo levert zo'n constructie via C_2 de andere gevraagde raaklijn. Dat één en ander zo werkt, volgt uit de oplossingen van de opgaven 15 t/m 20.

22 Bedoeld is hier eerst een lijnstuk a te maken dat net zo lang is als OA_2, om vervolgens een passer-liniaalconstructie te doen voor een punt P op de ellips (met F_1P + PF_2 = A_1A_2). We dienen daartoe eerst een lijnstukje met lengte 1 "af te spreken". Uit gelijkvormigheidseigenschappen voor driehoeken volgt dan de constructie van een lijnstuk met lengte OA_2. In de figuur is met c de lengte van OF_2 bedoeld. Doe de constructie van a zelf. Vervolgens is de constructie van zo'n punt P op de ellips gemakkelijk te doen.



23 Er zijn posities van het vlak waarbij de doorsnede telkens een tweetal evenwijdige lijnen is, er zijn posities van het vlak waarbij dat vlak de cilinder raakt (de "doorsnede" is dan een lijn), er zijn posities van het vlak waarbij de doorsnede telkens een cirkel is , maar "meestal" zien we een niet-cirkelvormige ellips. Zie Afbeelding 16 en raadpleeg opgave 27.

24 De afstand van O tot het raakpunt aan de bol dat ligt op de beschrijvende lijn door O, hangt niet af van de keuze van zo'n beschrijvende lijn.

25 Leg in Afbeelding 17 de kegel op zijn kant en je ziet meteen door te rollen dat elke rechte lijn op die kegelwand door de top gaat.

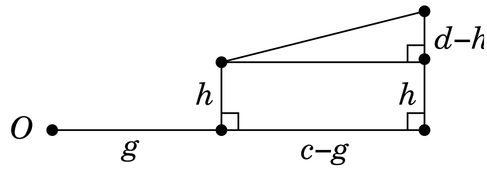
26 Een mechanische verklaring is voldoende. Beschouw de cilinder als een holle pijp met schuin erdoorheen het vlak V. Schuif "van boven" een bol door de pijp waarbij de gekozen bol de pijpwand overal rondom raakt. Op zeker moment raakt die bol het vlak V, en wel precies in één punt. Idem voor zo'n bol "van onderen".

27 D_1D_2 = D_1P + PD_2; met D_2P = PF_2 en D_1P = PF_1 volgt dus dat D_1D_2 = F_1P + PF_2. Laat nu het lijnstuk D_1D_2 telkens evenwijdig rond de cilinder lopen waarbij D_2 langs de in Afbeelding 20 getekende cirkel loopt. We zien dat F_1P + PF_2 kennelijk niet afhangt van de positie van D_2 op de "bovenste"cirkel (en daaraan gekoppeld de positie van D_1 op de "onderste"cirkel. Dus de doorsnijdingsfiguur van het vlak met de cilinder voldoet aan de definitie van het begrip ellips die in het begin van het tweede hoofdstuk staat. Om de aanwijzing te kunnen verklaren valt eerst op te merken dat F_1F_2 en M_1M_2 elkaar snijden. De rest van de verklaring van de aanwijzing wordt verder aan de lezer overgelaten.

28 In Afbeelding 21 zien we achtereenvolgens een ellips, een parabool, een hyperbool. Als het vlak V door de top van de kegel gaat, dan is de doorsnede een punt, een beschrijvende lijn, of een tweetal elkaar in de top snijdende (beschrijvende) lijnen.

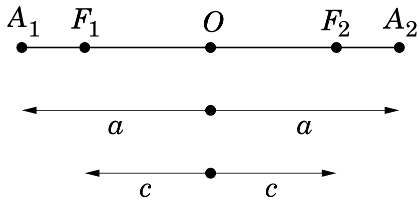
29 Voor de oplossing van deze opgave wordt verwezen naar de opgaven 23 en 27. Voor een gedetailleerd bewijs, zie in het bijzonder bladzijde 50 van het boek van Van Thijn en Kobus: “Inleiding tot de meetkunde der kegelsneden”; dat is in Doeboek 21 verwijzing nummer 15 .

32 Dit volgt door toepassing van de stelling van Pythagoras:



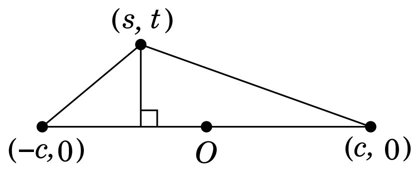
34 Beide breuken zijn positief.

35 Vergelijking X-as is Y = 0; Vergelijking Y-as is X = 0.



36 Als eerder, de punten A_1 en A_2 zijn de uiteinden van de lange as van de ellips en beide liggen erop. Hieronder staat een aanschouwelijke verklaring van de bewering $F_1A_2 + F_2A_2 = 2a = F_1A_1 + F2A_1$.

37 Pas de stelling van Pythagoras toe op een plaatje als dit:



Het kwadraat van de afstand van het punt (-c, 0) tot het punt (s,t) bedraagt $(s - (-c))^2 + (t - 0)^2$; dat van (s, t) tot (c, 0) bedraagt $(c - s)^2 + (0 - c)^2$; zie opgave 32. Dit verklaart de linkerkant van formule (2) . De som van die afstanden is 2a, omdat (s, t) op de ellips ligt terwijl de lange as 2a tot lengte heeft.

38 Ook dit is eerder in de opgaven ter sprake geweest. De afstand van het punt (0, b) tot F_2 is gelijk aan de afstand van (0, b) tot F_1; de som van die afstanden bedraagt 2a, zie de vorige opgave. Hieruit volgt meteen het gestelde door de stelling van Pythagoras toe te passen.

39 Controleer zelf wat hier aan de hand is. (Bij de overgang van stap 4 naar stap 3 wordt gebruik gemaakt van het feit dat we hier met een *rechthoekig* assenstelsel werken. Ook het worteltrekken levert geen problemen op. Ga na waarom niet).

44 In de eerste regel van opgave 43 staat een som van twee kwadraten. Uit de laatste regel van die opgave blijkt dat de uitkomst gelijk is aan nul. Welnu, een kwadraat is nooit een negatief getal ; voorts geldt dat a ongelijk aan nul is en dat b ongelijk aan nul is. Kennelijk is dus elk van die twee kwadraten gelijk aan nul. Dus $\alpha - \gamma = 0 = \beta - \delta$.

45 Het punt (u, v) ligt op de gegeven ellips. In de opgaven 40 t/m 44 is aangetoond dat de lijn met vergelijking $uX / a^2 + vY / b^2 = 1$ aan de ellips raakt in (u, v).

46 Dit gaat net zo als in opgave 45.

47 Het punt (s,t) is het snijpunt van de lijnen L_1 en L_2 en dus voldoen de coordinaten ervan zowel aan de vergelijking in opgave 45 als aan die in opgave 46.

48 Omdat de vergelijking in deze opgave een rechte lijn voorstelt waarbij op grond van de vorige opgaven de coördinaten van elk van de punten (u, v) en (e, f) aan die vergelijking voldoen, is de conclusie nu duidelijk geworden.

49 We moeten aantonen dat een punt (u, v) dat op de gegeven lijn ligt, alleen maar dan op de gegeven parabool kan liggen als u = s en v = t vervuld is. Welnu, stel dat (u, v) op die lijn en op die parabool ligt. Dan geldt $-pu + tv = ps$ en ook $2pu - v^2 = 0$. Gegeven is dat (s, t) op de parabool ligt, dus $t^2 = 2ps$ geldt ook; anders gezegd, $-ps + t{\cdot}t = ps$ geldt. Dus (s, t) ligt op de gegeven lijn. We combineren nu de drie gelijkheden $-pu + tv = ps$, $2pu - v^2 = 0$ en $-2ps + t^2 = 0$. En dus geldt $t^2 = 2ps = -2pu + 2tv = -v^2 + 2tv$. Daaruit volgt $0 = t^2 - 2tv + v^2 = (t - v)^2$. Dus inderdaad, v en t zijn hetzelfde. En daaruit volgt $0 = -2ps + t^2 = -2pu + v^2 = -2pu + t^2$. Dus geldt $2ps = 2pu$, oftewel $0 = 2p(s - u)$. Vandaar dat s gelijk is aan u; immers, p is ongelijk aan nul in de vergelijking $Y^2 = 2pX$ van die “echte” parabool.

50 Ook hier gaan we ervan uit dat er een punt (u, v) is dat zowel op de gegeven lijn als op de gegeven hyperbool ligt. We zullen laten zien dat u = s en v = t geldt, dus dat die lijn aan de hyperbool raakt. Daartoe beschouwen we de drie gelijkheden $u^2 / a^2 - v^2 / b^2 = 1$, $su / a^2 - tv/b^2 = 1$ en $s^2 / a^2 - t^2 / b^2 = 1$. We tellen het linker lid van de eerste gelijkheid, het linker lid van de derde gelijkheid en tweemaal het linker lid van de tweede gelijkheid bij elkaar op; de uitkomst “rechts” bedraagt dan 4. Anders gezegd, $(u + s)^2 / a^2 - (v - t)^2 / b^2 = 4$, of weer anders gezegd, $((u + s) / 2)^2 / a^2 - ((v + t) / 2)^2 / b^2 = 1$.
Dus het punt ((u + s) / 2, (v + t) / 2) ligt op de hyperbool. Stel eens dat het punt (u, v) niet hetzelfde punt is als (s, t). Dan ligt het punt ((u + s) / 2 , (v + t) / 2) op de lijn die door de punten (u, v) en (s, t) gaat; het is namelijk het midden van het lijnstuk dat begint in (u, v) en eindigt in (s, t). Let nu eens op het volgende: Minstens één der getallen s en t is niet gelijk aan nul, want (s, t) ligt op de hyperbool. Stel bijvoorbeeld dat t ongelijk is aan nul. Dan geldt $sX / a^2 - 1 = tY / b^2$, ofwel $Y = b^2sX / ta^2 - b^2 / t$. Hierbij is door t gedeeld, hetgeen toegestaan is omdat we t ongelijk aan nul hadden verondersteld. De gegeven lijn heeft tenminste één snijpunt met de hyperbool gemeenschappelijk; stel, zo’n snijpunt is (x, y) met x en y nader te bepalen. De x-coordinaat van zo’n snijpunt voldoet dan blijkbaar aan de vergelijking $X^2 / a^2 - ((b^2sX / ta^2 - b^2 / t)^2) / b^2 = 1$; geef deze vergelijking als verwijzingssymbool (A). Nu voldoet s aan vergelijking (A) omdat (s, t) op de hyperbool en op de gegeven lijn ligt; ook u voldoet aan vergelijking (A), immers (u, v) ligt op de hyperbool en op de gegeven lijn. We hebben hierboven gezien dat ook ((u + s) / 2 , (v + t) / 2) op de gegeven lijn op de hyperbool ligt. Echter, vergelijking (A) stelt een tweedegraadsvergelijking (ook wel genaamd vierkantsvergelijking) in de veranderlijke X voor, en die heeft hooguit twee oplossingen! (Denk aan de “abc-formule”.) En zo volgt nu, dat (u + s) / 2 = u of dat (u + s) / 2 = s; in elk van beide mogelijkheden volgt u = s en vervolgens zien we dat uit $s^2 / a^2 - t^2 / b^2 = 1 = su / a^2 - tv / b^2 = s^2 / a^2 - tv / b^2$ volgt dat v gelijk is aan t. Dit weerspreekt de aanname dat de punten (s, t) en (u, v) verschillend zouden zijn. Eenzelfde redenering met s ongelijk aan nul (in plaats van t zijnde niet nul) leidt tot v = t, mitsgaders u = s. Dus geldt blijkbaar zonder meer dat (s, t) hetzelfde punt is als (u, v), hetgeen wil zeggen dat de gegeven lijn in deze opgave aan de hyperbool raakt.

***** In de nu volgende oplossingen van de opgaven 51 t/m 61 wordt stilzwijgend gebruikt, dat er door vijf gegeven punten van het platte vlak hooguit één ellips gaat. Voor een bewijs hiervan, zie paragraaf 103 van Schrek’s boek “Beginselen der analytische meetkunde”; zie referentie 12 op de bladzijde Verder Lezen in Doeboek 21.

51 Beschouw Afbeelding 32 waarin we punt E laten samenvallen met punt A. De raaklijn in A aan de ellips wordt daar dan door toepassing van de stelling van Pascal verkregen. Dus, β is het snijpunt van AD en CF, γ het snijpunt van BD en EC (= AC) . Het punt α is het snijpunt van de lijn door β en γ en de lijn door B en F. Trek de lijn door α en A (= E). Die lijn is de gevraagde raaklijn in A aan de ellips.

52 Laten A, B, C, D en E de vijf gegeven punten van de ellips zijn. Trek een lijn m door B die door géén der punten A, C, D, en E gaat en die niet aan de ellips raakt; zoiets is altijd te doen (ga dit zelf na). Het snijpunt van m met AE noemen we α. Het snijpunt van BD en EC heet γ. Het snijpunt van de lijn door α en γ met AD heet β. Het snijpunt van de lijn door β en C met m is zo’n gevraagd zesde punt, noem het F, dat op de ellips ligt. Immers, neem eens het snijpunt van m met de ellips in gedachte, verschillend van B. Noem het F’. Dan liggen volgens de stelling van Pascal, het snijpunt van BF’en AE (dat is α!) , het punt gamma en het snijpunt van AD met CF’ op één lijn. Dat laatst genoemde (snij)punt is dus niets anders dan het van de lijn door α en γ met AD ; het is daarom gelijk aan β. Hieruit volgt dat enerzijds het gevonden punt F zowel op m als op de lijn door β en C ligt, en dat anderzijds F’ op m en de lijn door β en C ligt. Dus onderdaad F’= F , waarmee aangetoond is dat het punt F op de ellips ligt.

53 Gebruik Afbeelding 33. De gegeven raaklijnen zijn bv. a, b, c, d en e . De snijpunten van a met b , van b met c , van c met d, en van d met e, zijn achtereenvolgens P, Q, R en S. Trek een willekeurige lijn m door R die PS snijdt; noem het snijpunt α. Noem het snijpunt van m met a U . Het snijpunt van de lijn e met de door Q en α getrokken lijn heet T. De lijn door U en T is dan zo’n gevraagde zesde raaklijn. Vergelijk deze conclusie met de redenering zoals in de oplossing van opgave 52 is uiteengezet.

54 Gegeven zijn de punten P, Q, R, S en T opgevat als snijpunten van de gegeven lijnen a en b, b en c, c en d, d en e , e en f, waarbij in Afbeelding 33 f samenvalt met a. Trek door het snijpunt van TQ met PS de lijn die door R gaat. Daar, waar die lijn de lijn door P en T snijdt, bevindt zich het punt waar TP aan de ellips raakt. Vergelijk ook deze conclusie met de redenering zoals in de oplossingen van de opgaven 52 en 53 is uiteengezet.

55 Gebruik Afbeelding 32, waarbij we punt E laten samenvallen met punt A. De lijn door A (= E) en C en de lijn door B en D snijden elkaar in een punt γ. Kies een punt β op AD. Trek de lijn door β en γ. Daar. waar die lijn de gegeven raaklijn (waar A op ligt) snijdt, vinden we hun snijpunt, te noemen α. Trek de lijn door α en B. Daar, waar die lijn en de lijn door β en C elkaar snijden, vinden we hun snijpunt, te noemen F. Dat punt F is zo’n gevraagd vijfde punt op de ellips. Vergelijk deze oplossingsmethode met die van de oplossing van opgave 52.

56 Gebruik Afbeelding 32, waarbij punt E samenvalt met punt A en waarbij punt F samenvalt met punt B. Het snijpunt van de lijn door B (= F) en D met de lijn door E (= A) en C heet γ. Het snijpunt van de lijn door C en F (= B) met de lijn door A en D heet β. De lijn door β en γ en de raaklijn in A aan de ellips snijden elkaar in een punt, te noemen α. De lijn door α en B (= F) is de gevraagde raaklijn in B aan de ellips, zoals nu duidelijk is.

57 Gebruik Afbeelding 33, waarbij de lijn a en de lijn f samenvallen. Het punt U is dan het gegeven raakpunt A aan de ellips. Kies een punt T op de lijn a. Het snijpunt van de lijn door A en R met de lijn door T en Q heet α. Trek de lijn door P en α. Het snijpunt van die lijn met de lijn d heet S. De lijn door S en T is zo'n gevraagde vijfde raaklijn aan de ellips. Om het raakpunt B van b aan die ellips te vinden, maken we gebruik van opgave 54; immers vijf raaklijnen aan de ellips zijn nu bekend.

58 Gebruik Afbeelding 33. De lijnen a en f laten we samenvallen, evenals de lijnen b en c. De raakpunten A en B aan de ellips zijn dan niets anders dan de punten U en Q uit Afbeelding 33. Trek de lijn door A en R. Kies een punt S op de lijn d. Het snijpunt van de lijn door P en S met de lijn door A en R heet α. Trek de lijn door B en α. Het snijpunt van die lijn met de lijn a heet T . De lijn door T en S is zo'n gevraagde vierde raaklijn aan de ellips.

59 Het snijpunt van de lijnen a met b noemen we K; dat van de lijnen b met c U, dat van de lijnen c met a M. We trekken de lijn door A en U en de lijn door B en M; het snijpunt heet alfa. Het snijpunt van de lijn door K en alfa met de lijn c heet C. De lijn c raakt aan de ellips in het punt C; vergelijk met Afbeelding 33.

60 Bekijk in Afbeelding 33 de raaklijnen a, b, c, d en e aan de ellips. Zij T zo'n gegeven punt op raaklijn e. We gaan de andere raaklijn door T aan de ellips construeren. Trek de lijn door T en Q en de lijn door P en S. Het snijpunt van die twee lijnen heet alfa. Trek de lijn door alfa en R. Het snijpunt van de lijn a met de lijn door alfa en R heet U. De lijn door T en U is de gevraagde andere raaklijn door T aan de ellips.

61 Deze opgave is zonder meer de lastigste van Doeboek 21. De oplossing verloopt in twee stappen:

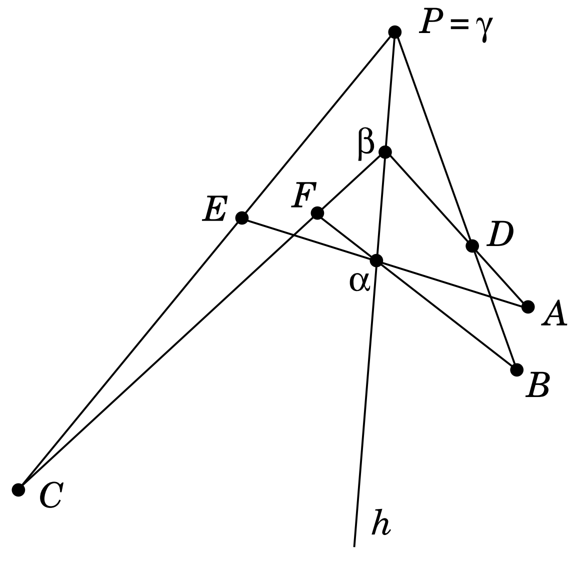
Eerst wordt beschreven hoe met behulp van de liniaal alleen,drie lijnen door het geven punt buiten de ellips geconstrueerd kunnen worden, zodanig, dat elk van die lijnen de ellips in twee punten snijdt; die constructie wordt tevens zo' uitgevoerd dat ook de zes bijbehorende snijpunten door deze constructie worden vastgelegd.

Raadpleeg vervolgens Afbeelding 34 in Doeboek 21. Aldaar is de lijn door δ en ε afgedrukt, waarbij δ het snijpunt is van SV met UT en ε het snijpunt van VW met UX. Op de laatste twee bladzijden van het vierde hoofdstuk staat het bewijs afgedrukt dat die lijn de gevraagde poollijn van het punt P ten opzichte van de ellips is.

Nu volgt de uitwerking van de eerste stap.

Laat vijf punten van de ellips gegeven zijn. Met P geven we het gegeven punt buiten de ellips aan. Voor twee van de vijf gegeven punten (noem ze B en C) geldt met zekerheid dat de lijn door P en B en de lijn door P en C ieder niet raken aan de ellips , terwijl ze bovendien verschillend van elkaar zijn. Met behulp van een variant op opgave 52 is het snijpunt van de lijn door P en B met de ellips te construeren dat van B verschilt; noem dat punt D. [Die variant op opgave 52 luidt als volgt: Gegeven vijf punten van een ellips en een lijn door één van die punten, niet rakende aan die ellips en niet gaande door elk van de overige vier gegeven punten. Construeer het tweede snijpunt van die lijn met de ellips (voer die constructie zelf uit)]. En evenzo is op de lijn door P en C het punt E te construeren liggend op de ellips en verschillend van C. Met het oog op een geschikt meetkundig plaatje spreken we nu af dat D tussen P en B ligt en dat E tussen P en C ligt; zoiets kan zonder de algemeenheid te schaden altijd worden bewerkstelligd door eventueel D en B van rol te laten wisselen en evenzo E en C. Van de oorspronkelijke gegeven vijf punten is er zeker één , noem het A , dat niet op de lijn door P en C ligt en ook niet op de lijn door P en B.

Stel nu eens dat C en B niet aan dezelfde kant van de lijn door P en A liggen. Dan kan men weer onder het aanroepen van de variant op opgave 52 het punt construeren dat zowel op de ellips ligt als ook op de lijn door P en A, verschillend van A; immers, in dit geval raakt de lijn door P en A de ellips niet. Zo is hier dus de eerste stap van de oplossing voltooid; drie lijnen gaande door P mitsgaders de bijbehorende zes snijpunten met de ellips, zijn geconstrueerd met behulp van de liniaal alleen.



Dus stel vervolgens dat C en B wel aan dezelfde kant van de lijn door P en A liggen. Beschouw nu de *vierhoek* BDEC en denk aan de gemaakte afspraak over de ligging van D en B en van E en C. Omdat de punten B, D, E en C op de ellips liggen, moet A aan dezelfde kant van de lijn door D en E liggen als waar de punten B en C zich bevinden; ook moet A aan dezelfde kant van de lijn door B en C liggen als waar de punten E en D zich bevinden. Deze positiebepaling van A blijkt van belang te zijn voor de positie van een zeker punt F dat zo dadelijk zal worden bepaald.

Vernoem P tot γ. Trek een willekeurige *halflijn* h vanuit P tussen de benen PC en PB. Trek de lijn door A en D; noem het snijpunt van die lijn met h β. Het snijpunt van de lijn door A en E met h heet α. Trek de lijn door α en B. Daar, waar die lijn de lijn door β en C snijdt, bevindt zich het betreffende punt F waar we onze aandacht op richten. Dat punt F ligt op de ellips, zoals duidelijk is uit een constructiebeschrijving die sterk lijkt op die van opgave 52. Uit de gemaakte opmerking over de positie van A volgt nu dat B en C niet aan dezelfde kant van de lijn door P en F liggen, vandaar dat de lijn door P en F de ellips niet raakt. Bij deze beschouwing over de positie van F doet het er ook niet toe of A wel of niet aan dezelfde kant kant van de lijn door P en B ligt als waar de punten C en E zich bevinden (dit is hetzelfde als te zeggen dat het er niet toe doet of A wel of niet aan dezelfde kant van de lijn door P en C ligt als waar de punten B en D zich bevinden).

Dus ook hier zijn nu drie lijnen gaande door P geconstrueerd, terwijl de bijbehorende zes snijpunten met de ellips alle geconstrueerd zijn met behulp van de liniaal alleen. Het gaat immers om de lijnen door P en B , door P en C, en door P en F ; het andere snijpunt van de lijn door P en F met de ellips kan namelijk weer worden geconstrueerd met behulp van de constructie zoals beschreven in de oplossing van opgave 52.

Hiermee is de eerste stap geheel uitgevoerd; voor het vervolg zij dus verwezen naar het eind van het vierde hoofdstuk in Doeboek 21; hierbij is Afbeelding 34 verkregen door de constructie zals beschreven in de eerste stap, te volgen. De benaming der optredende punten in Afbeelding 34 is aangepast.