C. Wildhagen

Doeboek 16

Puzzels voor junioren

Oplossingen

vierkant wiskunde

Oplossingen

1. Er zijn 14 oplossingen:

$1+2+3+4+5+6+7+8\times9$, $1+2+3-4\times5+6\times7+8\times9$,
$1+2-3\times4+5\times6+7+8\times9$, $1+2-3\times4-5+6\times7+8\times9$, $1+2\times3+4\times5-6+7+8\times9$,
$1-2+3\times4\times5+6\times7+8-9$, $1-2+3\times4\times5-6+7\times8-9$, $1-2\times3+4\times5+6+7+8\times9$,
$1-2\times3-4+5\times6+7+8\times9$, $1-2\times3-4-5+6\times7+8\times9$, $1\times2\times3+4+5+6+7+8\times9$,
$1\times2\times3-4\times5+6\times7+8\times9$, $1\times2\times3\times4+5+6+7\times8+9$, $1\times2\times3\times4+5+6-7+8\times9$.

2. $101 - 10^2 = 1$.

3. Zowel het aantal kippen als ook de tijdsduur wordt 2½ keer zo groot, dus er worden
2½ × 2½ keer zo veel eieren gelegd. Er worden daarom 25 eieren gelegd.
Andere methode. 1 kip legt 1 ei in 4 dagen, dus 10 kippen leggen 10 eieren in 4 dagen.
Daarom leggen 10 kippen 2½ × 10 = 25 eieren in 10 dagen.

4.

$$1 = 4 - 4 + \frac{4}{4} \qquad 5 = \frac{4 + 4\times4}{4} \qquad 8 = 4+4+4-4$$

$$2 = \frac{4}{4} + \frac{4}{4} \qquad 6 = 4 + \frac{4 + 4}{4} \qquad 9 = 4+4+\frac{4}{4}$$

$$3 = \frac{4 + 4 + 4}{4} \qquad 7 = 4+4-\frac{4}{4} \qquad 10 = \frac{44 - 4}{4}$$

$$4 = 4 + \frac{4 - 4}{4}$$

5. Indien de kleinzoon 0 jaar oud zou zijn, dan waren de drie leeftijden: 0 , 35 en 59 jaar.
In dit geval is de som der leeftijden gelijk aan 94 jaar. Dit is 6 jaar te weinig. Elk van de personen is daarom 2 jaar ouder, dus de leeftijden zijn: 2 , 37 en 61 jaar.

6. Uit de wedstrijd van Piet tegen Klaas leren we dat bij elke 10 meter die Piet aflegt, Klaas 1 meter achterblijft. Neem nu aan dat bij de wedstrijd tussen Jan en Klaas, Piet ook meeloopt. Als Jan de finish passeert, dan heeft Piet 90 meter afgelegd. Klaas heeft 9 meter minder dan Piet afgelegd. Jan eindigt daarom met een voorsprong van 19 meter op Klaas.

7. De auto's naderen elkaar met een snelheid van 210 km per uur, dus met een snelheid van 3,5 km per minuut. Één minuut voordat de beide auto's elkaar tegenkomen zijn ze daarom 3,5 km van elkaar verwijderd.

8. Indien er slechts 35 fazanten zouden zijn, dan waren er in totaal $35 \times 2 = 70$ poten. Dit zijn 24 poten te weinig. Dus er moeten 12 van de 35 fazanten ingeruild worden voor 12 konijnen. Elke keer dat je namelijk een fazant inruilt voor een konijn krijg je twee poten extra terwijl het aantal koppen niet verandert. De conclusie is dat er 23 fazanten en 12 konijnen zijn.

9. De eerste en de honderdste trede, de tweede en negenennegentigste, de derde en de achtennegentigste enzovoort tot en met de vijftigste en de eenenvijftigste trede bevatten elk samen 101 duiven. Dus het totaal aantal duiven is gelijk aan $50 \times 101 = 5050$ duiven.

10. Er zijn drie oplossingen: 267 en 534 , 273 en 546 , 327 en 654.

11. Indien de kleinzoon 0 jaar oud zou zijn, dan zou, vanwege de eerste twee gegevens, de zoon 25 jaar en de leraar 49 jaar oud zijn. Dit zou betekenen dat kleinzoon en leraar samen 49 jaar oud zijn. Maar dit is 24 jaar te weinig in vergelijking met het werkelijke aantal van 73 jaar. Elk van de personen is daarom 12 jaar ouder.
De conclusie is dat de leeftijden zijn: kleinzoon: 12 jaar, zoon: 37 jaar, leraar: 61 jaar.

12. We geven één van de vele oplossingen:

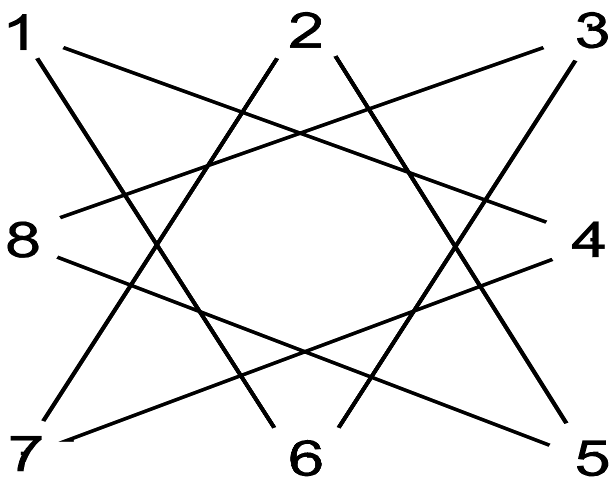
	D						
			D				
					D		
							D
		D					
D							
						D	
				D			

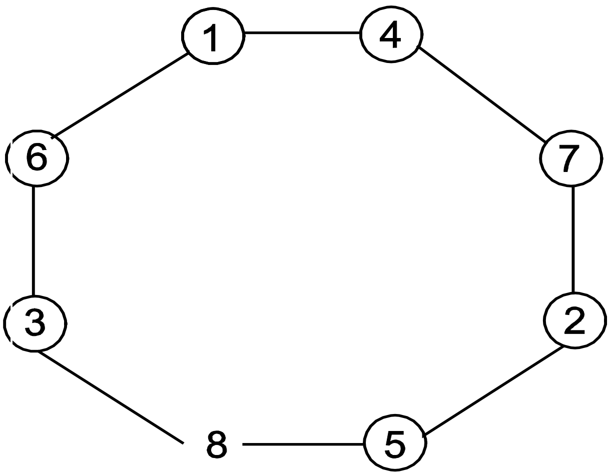
13. Nummer de velden zoals hieronder is aangegeven:

1	2	3
8		4
7	6	5

1. **1 → 4**	5. **4 → 7**	9. **7 → 2**	13. **2 → 5**
2. 5 → 8	6. 8 → 3	10. 3 → 6	14. 6 → 1
3. **3 → 6**	7. **6 → 1**	11. **1 → 4**	15. **4 → 7**
4. 7 → 2	8. 2 → 5	12. 5 → 8	16. 8 → 3

We zullen het systeem dat achter deze oplossing zit nog duidelijker tonen.
Het 3 bij 3 bordje kunnen we als volgt vervangen door een figuur van lijnen en cirkels.
In de cirkels staan de nummers van de velden. Twee velden verbinden we door een lijn als je met een paard van het ene veld naar het andere veld kunt springen. De figuur die je nu krijgt noemen we een *graaf*. Dit is de linkerfiguur op de volgende pagina .
Er komen veel kruisende (snijdende) lijnen voor. We kunnen de figuur *ontkruisen* door hem anders te tekenen. Dit is in de rechterfiguur op de volgende pagina gedaan. Deze figuur is veel overzichtelijker en het gevolgde systeem van zetten is hier zeer eenvoudig.





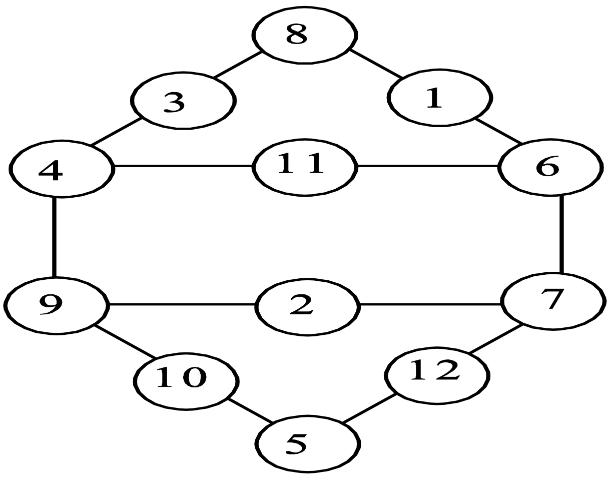
14. We nummeren eerst de velden op de volgende manier:

1	2	3
4	5	6
7	8	9
10	11	12

We tekenen nu, zoals in de vorige opgave, een graaf die bij dit 3 bij 4 bord hoort.
Twee velden zijn verbonden door een lijntje als je met een paard van het ene veld naar het andere veld kunt springen.
Daarna gaan we de figuur ontkruisen. Je kunt dan de figuur krijgen die hieronder is getekend.

De oplossing is hierna eenvoudig:

1)	1 → 8	10 → 5
2)	2 → 9	11 → 6
3)	3 → 4	12 → 7
4)	8 → 3	5 → 12
5)	9 → 10	6 → 1
6)	4 → 9	7→ 6
7)	3 → 4	12 → 7
8)	10 → 5	1 → 8
9)	9 → 10	6 → 1
10)	4 → 11	7 → 2
11)	5 → 12	8 → 3



Opmerking
Als de borden groter worden is het volledig ontkruisen vaak onmogelijk. Toch kan een gedeeltelijke ontkruising het probleem al een stuk overzichtelijker maken.

15.

					P		
	P	P		P	P		
		P					
					P		
		P	P		P	P	
		P					

16. Je kunt de dames bijvoorbeeld op de velden a1, c5 en d3 zetten. Er zijn nog drie andere oplossingen, die we uit onze oplossing verkrijgen door het bord rondom het middelpunt een kwartslag (linksom of rechtsom) of een halve slag te draaien.

17. Zet de dames op bijvoorbeeld de velden: a2, c4, d5, e6, g8.
In het begin van deze eeuw heeft men uitgezocht dat er 4680 essentieel verschillende oplossingen zijn.

18. We nummeren de velden van het bord als volgt:

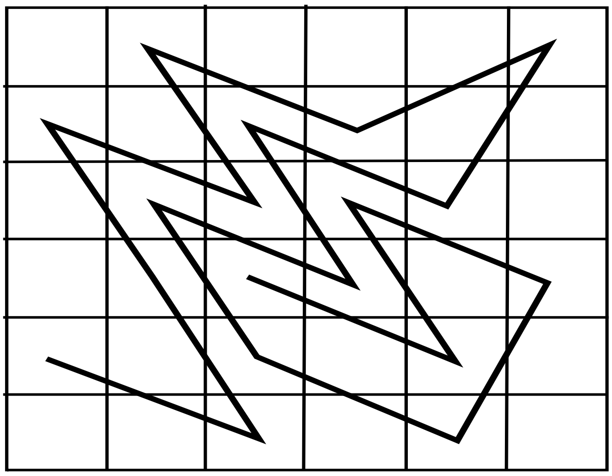
1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16
17	18	19	20

De oplossing zou aldus kunnen verlopen:

1)	18 → 15	**3 → 6**	7)	5 → 10	**16 → 11**	13)	19 → 16	**2 → 5**
2)	17 → 8	**4 → 13**	8)	9 → 19	**12 → 2**	14)	16 → 1	**5 → 20**
3)	19 → 14	**2 → 7**	9)	10 → 4	**11 → 17**	15)	9 → 6	**12 → 15**
4)	15 → 5	**6 → 16**	10)	20 → 10	**1 → 11**	16)	13 → 7	**8 → 14**
5)	8 → 3	**13 → 18**	11)	3 → 9	**18 → 12**	17)	6 → 3	**15 → 18**
6)	14 → 9	**7 → 12**	12)	10 → 13	**11 → 8**	18)	7 → 2	**14 → 19**

19. Een zo lang mogelijke route is:
d1 → h1 → a8 → h8 → h2 → c7.
(teken deze route op ruitjespapier!)

20.



21. We noteren bij elke zet welke fiche er gespeeld wordt:
③ – ❹ – ❺ – ③ – ② – ① – ❹ – ❺ – ❻ – ③ – ② – ① – ❺ – ❻ – ① .
Je kunt natuurlijk ook de velden van links naar rechts de nummers 1 t/m 7 geven.
Dan zijn de zetten op de volgende manier op te schrijven:
3 → 4 , 5 → 3, 6 → 5 , 4 → 6 , 2 → 4 , 1 → 2 ,
3 → 1 , 5 → 3 , 7 → 5 , 6 → 7 , 4 → 6 , 2 → 4 ,
3 → 2 , 5 → 3 , 4 → 5.

Opmerking:
Je kunt ook een bord nemen met 9 velden, waarbij 4 witte fiches op de 4 linkervelden en
4 zwarte fiches op de rechtervelden staan. Of je kunt nog grotere borden nemen.
Kun je een regelmaat ontdekken in het minimale aantal zetten dat nodig is ?
(bekijk ook kleinere borden)

22. M = man , G = geit , W = wolf , K = kool en B = bootje.
We geven één van de twee mogelijke oplossingen met een minimaal aantal 'zetten'.

Deze zijde	Overzijde
M , G , W , K , B	
W , K	M , G , B
M , W , K , B	G
W	M , G , K , B
M , G , W , B	K
G	M , W , K , B
M , G , B	W , K
	M , G , W , K , B

23. We zullen aangeven welke fiches verplaatst worden.
2 - 4 - 6 - 5 - 3 - 1 - 2 - 4 - 6 - 5 - 3 - 1 - 2 - 4 - 6 - 5 - 3 - 1 - 2 - 4 - 6 .
Door het duidelijke systeem is deze oplossing eenvoudig te onthouden.

24. We gebruiken de notatie *a*-*b*-*c* om aan te geven dat de 5- , 7- en 12-liter vaten
respectievelijk *a* , *b* en *c* liter wijn bevatten.
De oplossing kan aldus verlopen:
0-0-12 , 0-7-12 , 5-2-5 , 0-2-10 , 2-0-10 , 2-7-3 , 5-4-3 , 0-4-8 , 4-0-8 , 4-7-1 , 5-6-1 , 0-6-6.

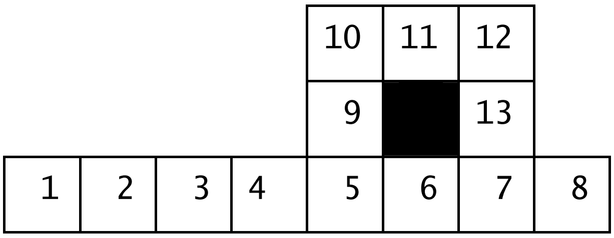
25. Nummer de velden als volgt:

1	2	3	4	5	6	7	8
				9			
10	11	12	13	14	15	16	17

1) **5** → 10
2) **4** → 11
3) **3** → 12
4) **2** → 13
5) **1** → 14
6) **6** → 2
7) **7** → 3
8) **8** → 4
9) **1** → 17
10) **2** → 16
11) **3** → 15
12) **4** → 7
13) **5** → 6
14) **8** → 10
15) **7** → 11
16) **6** → 12
17) **5** → 13
18) **4** → 14

26. We gebruiken dezelfde notatie als in opgave 24. De oplossing is:
6-7-11 , 6-14-4 , 12-8-4 , 8-8-8.

27. We nummeren de velden op de aangegeven manier:

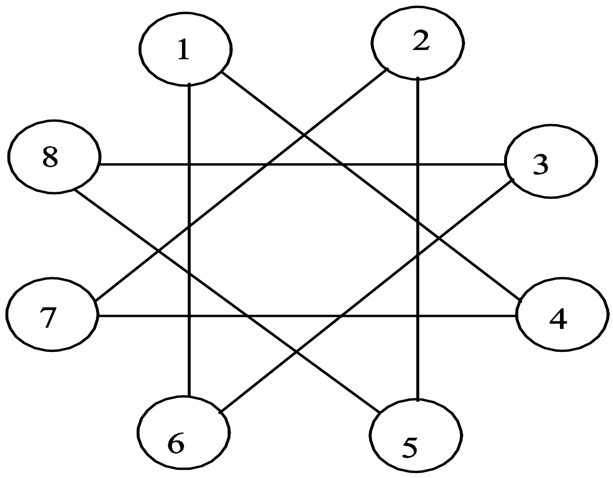


Het doel kan als volgt bereikt worden:

1) **5** → 13	7) **7** → 4	13) **1** → 11
2) **4** → 12	8) **8** → 5	14) **8** → 10
3) **3** → 11	9) **5** → 6	15) **7** → 9
4) **2** → 10	10) **4** → 7	16) **6** → 5
5) **1** → 9	11) **3** → 13	
6) **6** → 3	12) **2** → 12	

28. Voorzie de velden van links naar rechts met de nummers 1 t/m 10.
De oplossing verloopt aldus:
1) 8-9 → 1-2 2) 5-6 → 8-9 3) 2-3 → 5-6
4) 9-10 → 2-3

29. Nummer de velden op de aangegeven manier. Het probleem is als volgt op te lossen:



1) 1 → 4
2) 6 → 1
3) 3 → 6
4) 8 → 3
5) 5 → 8
6) 2 → 5
7) 7 → 2

Opmerking
Deze oplossing wordt nog duidelijker, als je de hier getekende figuur *ontkruist*, zoals bij de oplossing van opgave 13 uitgelegd is.
Kun je zelf ook zo'n puzzel verzinnen met 12 cirkels? Hoe moeten dan de lijntjes lopen?

30. We nummeren de velden als volgt:

		11		12		13			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

De oplossing verloopt aldus (vaak zijn meerstapszetten opgeschreven):

1) **2** → 1	8) **9** → 6	15) **5** → 7	22) **3** → 3
2) **3** → 2	9) **1** → 13	16) **4** → 6	23) **4** → 4
3) **4** → 11	10) **9** → 10	17) **1** → 11	24) **5** → 5
4) **5** → 3	11) **8** → 9	18) **3** → 12	25) **6** → 6
5) **6** → 4	12) **7** → 8	19) **2** → 4	26) **7** → 7
6) **7** → 12	13) **1** → 12	20) **1** → 1	27) **8** → 8
7) **8** → 5	14) **6** → 13	21) **2** → 2	28) **9** → 9

31.

1	2	3		
4	5	6		
7	8	9	10	11
		12	13	14
		15	16	17

Als een fiche op veld *a* naar het lege veld schuift of springt, dan kunnen we deze zet aangeven met *a* (dit is ondubbelzinnig). Een overzichtelijke, maar waarschijnlijk niet meest snelle oplossing, verloopt aldus:
8-10-11-9-7-8-10-9-6-12-15-9-3-6-12-15-16-17-14-11-10-9-12-15-16-17-14-11-10-9-6-3-2-1-4-7-8-9-6-3-2-1-4-7-8-9-6-12-15-9-3-6-12-15-16-13-10-9-12-15-16-17-14-11-10-9-6-3-2-5-6-3-2-5-8-9-6-12-15-9-3-6-12-9.
Kun je zelf een snellere oplossing vinden?

32. Nummer de velden op de volgende manier:

	11	12	13	14	15	16	17	
	10						18	
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Het gewenste doel is als volgt te bereiken:

1) **8** → 9
2) **9** → 10
3) **7** → 12
4) **6** → 13
5) **5** → 14
6) **4** → 15
7) **3** → 16
8) **2** → 17
9) **1** → 18
10) **8** → 1
11) **1** → 2
12) **2** → 3
13) **3** → 4
14) **4** → 5
15) **5** → 6
16) **6** → 7
17) **7** → 9
18) **6** → 13
19) **5** → 14
20) **4** → 15
21) **3** → 16
22) **2** → 17
23) **1** → 18
24) **7** → 2
25) **1** → 3
26) **2** → 4
27) **3** → 5
28) **4** → 6
29) **5** → 7
30) **6** → 9
31) **5** → 14
32) **4** → 15
33) **3** → 16
34) **2** → 17
35) **1** → 18
36) **6** → 3
37) **1** → 4
38) **2** → 5
39) **3** → 6
40) **4** → 7
41) **5** → 9
42) **4** → 15
43) **3** → 16
44) **2** → 17
45) **1** → 18
46) **5** → 4
47) **1** → 5
48) **2** → 6
49) **3** → 7
50) **4** → 9
51) **3** → 16
52) **2** → 17
53) **1** → 18
54) **4** → 5
55) **1** → 6
56) **2** → 7
57) **3** → 9
58) **2** → 17
59) **1** → 18
60) **3** → 6
61) **1** → 9
62) **2** → 7
63) **1** → 8
64) **9** → 14

33. Nummer de fiches in de onderste rij van links naar rechts met 1 t/m 8 en de fiches in de middelste rij van links naar rechts met 9 t/m 16.
Je kunt dan bijvoorbeeld op de volgende manier te werk gaan:
3 × 11 , 9 × 10 , 1 × 2 , 7 × 15 , 8 × 16 , 8 × 7 ,
5 × 13 , 1 × 4 , 8 × 5 , 6 × 14 , 3 × 8 , 6 × 3 , 6 × 12 ,
1 × 6 , 1 × 9 .

34. De kortste oplossing verloopt aldus :
8-0-0 → 3-5-0 → 3-2-3 → 6-2-0 → 6-0-2 → 1-5-2 → 1-4-3 → 4-4-0.
[de notatie *a*-*b*-*c* betekent: het 8-liter vat bevat *a* liter, het 5-liter vat bevat *b* liter en het 3-liter vat bevat *c* liter wijn]

35. We gebruiken de afkortingen: A = Ad, B = Ben, C = Cor, D = Dirk en R = roeibootje.
De overtocht kan aldus verlopen:

Deze kant	**Overkant**
A , B , C , D , R	-
A , C	B , D , R
A , C , D , R	B
A	B , C , D , R
A , D , R	B , C
D	A , B , C , R
B , D , R	A , C
-	A , B , C , D , R

36. Geef de schijven de nummers 1 t/m 5, waarbij de kleinste schijf nummer 1 krijgt, de op één na kleinste nummer 2, etc. De pinnen worden van links naar rechts voorzien van de letters *a* , *b* en *c*. De kortste oplossing verloopt aldus:

1) 1 → *c*	8) 4 → *b*	15) 1 → *b*	22) 2 → *a*	29) 1 → *a*
2) 2 → *b*	9) 1 → *b*	16) 5 → *c*	23) 1 → *a*	30) 2 → *c*
3) 1 → *b*	10) 2 → *a*	17) 1 → *a*	24) 4 → *c*	31) 1 → *c*
4) 3 → *c*	11) 1 → *a*	18) 2 → *c*	25) 1 → *c*	
5) 1 → *a*	12) 3 → *b*	19) 1 → *c*	26) 2 → *b*	
6) 2 → *c*	13) 1 → *c*	20) 3 → *a*	27) 1 → *b*	
7) 1 → *c*	14) 2 → *b*	21) 1 → *b*	28) 3 → *c*	

Opmerking
Voor 5 schijven heb je dus 31 zetten nodig (als je zo goed mogelijk speelt). Probeer zelf uit te zoeken hoeveel zetten je nodig hebt bij 1, 2, 3 of 4 schijven. Hopelijk zie je nu een regelmaat in de antwoorden. Als je deze regelmaat gevonden hebt, dan is het eenvoudig om na te gaan hoeveel zetten je nodig hebt bij bijvoorbeeld 20 schijven.
Niet alleen in het aantal benodigde zetten, maar ook in de manier van spelen zit een mooi systeem. Laten we eens kijken hoe in ons voorbeeld elk van de schijven beweegt:
1: *c-b-a-c-b-a-c-b-a-c-b-a-c-b-a-c* , 2: *b-c-a-b-c-a-b-c*
3: *c-b-a-c* , 4: *b-c* , 5: *c.*
Als we de pinnen in de hoekpunten van een driehoek plaatsen, dan zien we dat de schijven rondjes draaien langs de pinnen. De schijven met een oneven nummer draaien in dezelfde richting, maar de schijven met een even nummer draaien in de andere richting. Op de oneven zetten (zet 1, 3, 5 enz.) wordt schijf 1 gespeeld volgens dit systeem. Op de even zetten (zet 2, 4, 6 enz.) wordt met een andere schijf gespeeld. Dit is maar op één manier mogelijk, dus daar hoef je niet over na te denken. Je dient alleen nog te weten hoe je begint. De regel hiervoor is dat bij een oneven aantal schijven de beginzet 1 → *c* is (denk maar aan de situatie met één schijf), en bij een even aantal schijven 1 → *b*.

37. Je kunt deze puzzel als volgt oplossen:
$2 \to 3$, $9 \to 4$, $10 \to 7$, $3 \to 8$, $4 \to 2$, $7 \to 5$,
$8 \to 6$, $5 \to 10$, $6 \to 9$, $2 \to 5$, $1 \to 6$, $6 \to 4$,
$5 \to 3$, $10 \to 8$, $4 \to 7$, $3 \to 2$, $8 \to 1$, $7 \to 10$.

Opmerking
Kijk nog eens naar lastige opgave 18 over de 8 lopers. Een loper op een licht (donker) veld beweegt slechts langs lichte (donkere) velden. We kunnen het bord daarom splitsen in twee deelborden, die beide bestaan uit velden van dezelfde kleur, en op elk van die borden het eenvoudigere probleem met 4 lopers aanpakken. Beide problemen zijn identiek aan opgave 37. Het is dan nog slechts een kwestie van het 'mengen' van beide problemen.

38. We noteren de echtparen als M_1 , V_1 , M_2 , V_2 , M_3 en V_3. Hierbij is V_1 de vrouw van M_1 , enz. B is het bootje. We geven 'n oplossing aan in het volgende schema:

Deze zijde	Overzijde
M_1 , V_1 , M_2 , V_2 , M_3 , V_3 , B	
M_2 , V_2 , M_3 , V_3	M_1 , V_1 , B
M_1 , M_2 , V_2 , M_3 , V_3 , B	V_1
M_1 , M_2 , M_3	V_1 , V_2 , V_3 , B
M_1 , V_1 , M_2 , M_3 , B	V_2 , V_3
M_1 , V_1	M_2 , V_2 , M_3 , V_3 , B
M_1 , V_1 , M_2 , V_2 , B	M_3 , V_3
V_1 , V_2	M_1 , M_2 , M_3 , V_3 , B
V_1 , V_2 , V_3 , B	M_1 , M_2 , M_3
V_1	M_1 , M_2 , V_2 , M_3 , V_3 , B
V_1 , V_2 , B	M_1 , M_2 , M_3 , V_3
	M_1 , V_1 , M_2 , V_2 , M_3 , V_3 , B

39. Met $a \times b$ bedoelen we dat de fiche met nummer *a* springt over de fiche met nummer *b*.
We geven één van de vele mogelijke oplossingen:
5×2 , 5×1 , 5×7 , 5×9 , 3×6 , 4×8 , 4×3 , 5×4 .

40. a) Nummer de munten van links naar rechts met 1 t/m 10. Met de schrijfwijze $a \to b$ bedoelen we dat de munt met nummer *a* op de munt met nummer *b* gelegd wordt.
De oplossing zou als volgt kunnen verlopen: $4 \to 1$, $6 \to 9$, $8 \to 3$, $2 \to 5$, $10 \to 7$.
b) Maak eerst drie stapels aan bijvoorbeeld de linkerzijde:
$4 \to 1$, $6 \to 2$, $8 \to 3$.
Op de resterende 10 munten kun je de methode van a) toepassen.

41. Je moet elke munt een oneven aantal keer omdraaien. Dit kan in 4 "zetten" bereikt worden door elke munt in precies één van de 4 zetten *niet* om te draaien.

42. Nummer de munten van links naar rechts met 1 t/m 16. Het doel is als volgt te bereiken:
$7 \to 2$, $8 \to 7$, $9 \to 8$, $10 \to 15$, $6 \to 10$, $5 \to 6$, $14 \to 16$, $13 \to 14$, $12 \to 13$, $3 \to 1$, $4 \to 3$, $11 \to 4$.

43. Neem één munt van de eerste stapel, twee munten van de tweede stapel, drie munten van de derde stapel, ... , tien (dus alle) munten van de tiende stapel. Leg deze 55 munten op de weegschaal. Indien elk van de 100 munten 6 gram zou wegen, dan zou het gewicht van de 55 munten gelijk zijn aan $55 \times 6 = 330$ gram. Stel nu dat het werkelijke gewicht van de 55 munten gelijk is aan b.v. 326 gram. Dit is 4 gram minder dan 330 gram. Dan moeten er onder de 55 munten 4 lichtere zijn. Deze zijn afkomstig van dezelfde, dus de vierde stapel.
De vierde stapel bevat daarom in dit geval de lichtere munten.

44. Geef de munten, als we langs de cirkel lopen, de nummers 1 t/m 12.
We laten één van mogelijke oplossingen zien:
$3 \to 12$, $5 \to 1$, $7 \to 10$, $9 \to 4$, $6 \to 2$, $11 \to 8$.
Opmerking: na de eerste zet is het probleem hetzelfde als dat in opgave 40 a).

45. Geef de kwartjes van links naar rechts de nummers 1 t/m 7.
We noteren steeds welke drie kwartjes omgedraaid worden.
1) 1 , 2 , 3
2) 3 , 4 , 5
3) 3 , 6 , 7

46. Eerst een omslachtige manier van tellen. De balk bestaat uit twee zijvlakken met $8\times9 = 72$ blokjes, twee zijvlakken met $8\times10 = 80$ blokjes en twee zijvlakken met $9\times10 = 90$ blokjes. Dit zijn in totaal: $2\times72 + 2\times80 + 2\times90 = 144 + 160 + 180 = 484$ blokjes. Maar hierbij heb je sommige blokjes dubbel of zelfs drie keer geteld. De 8 hoekblokjes heb je drie keer meegeteld, dus we moeten 484 verminderen met $2\times8 = 16$ blokjes. Dan zijn er nog 468 over. De blokjes die op een ribbe liggen maar geen hoekblokje zijn, heb je twee keer meegeteld. Er zijn $4\times6 + 4\times7 + 4\times8 = 84$ van zulke blokjes. We moeten daarom 468 nog verminderen met 84. Dit geeft 384 blokjes. Zoveel blokjes zitten in de buitenlaag van de balk, dus 384 blokjes zijn gedeeltelijk geverfd.

Het kan echter veel eenvoudiger. De balk bestaat uit $8\times9\times10 = 720$ blokjes. Alle blokjes van de buitenlaag zijn gedeeltelijk geverfd. Haal de buitenlaag van de balk eraf. Er blijft een balk over die is opgebouwd uit $6\times7\times8 = 336$ ongeverfde blokjes.
Het aantal gedeeltelijk geverfde blokjes is daarom gelijk aan $720 - 336 = 384$.

47. De scores die je kunt behalen bij de 6 vragen vormen een scorelijst.
De scorelijsten met een totaalscore van 16 punten kun je indelen in twee groepen:
groep A: vijf scores 3 en één score 1 ; groep B: vier scores 3 en twee scores 2.
Groep A bevat 6 scorelijsten. Er zijn namelijk 6 mogelijkheden voor het uitkiezen van de vraag waarvoor 1 punt gescoord wordt.
Groep B bevat 15 scorelijsten, omdat er 15 manieren zijn om de twee vragen te kiezen waarvoor 2 punten gescoord zijn. Er zijn namelijk 5 van die scorelijsten waarbij 2 punten voor vraag 1 gescoord wordt, 4 lijsten waarbij bij vraag 2, maar niet bij vraag 1, twee punten gescoord zijn, 3 lijsten, waarbij bij vraag 3, maar niet bij de vragen 1 en 2, twee punten gescoord zijn, enzovoort.
Het aantal van de lijsten in groep B is daarom: $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$.

48. Elke driehoek in de getekende figuur heeft één horizontale zijde. Hierop liggen twee hoekpunten. Ligt het derde hoekpunt boven de horizontale zijde dan noemen we de driehoek een boven-driehoek, en in het andere geval een onder-driehoek.

De afmeting van een driehoek is het aantal kleine driehoekjes in deze driehoek.
Een boven-driehoek met afmeting 9 zullen we een 9-boven-driehoek noemen.
Evenzo voor de andere types. We maken een indeling in groepen van de collectie
driehoeken die we moeten tellen en vermelden steeds het aantal driehoeken in de groep.

1-boven-driehoeken:	21	36-boven-driehoeken:	1
4-boven-driehoeken:	15	1-onder-driehoeken:	15
9-boven-driehoeken:	10	4-onder-driehoeken:	6
16-boven-driehoeken:	6	9-onder-driehoeken:	1
25-boven-driehoeken:	3		

In totaal zijn er dus 78 driehoeken.

49. Er zijn 7 oplosssingen:

T			
	T		
		T	
			T

T			
	T		
			T
		T	

T			
		T	
	T		
			T

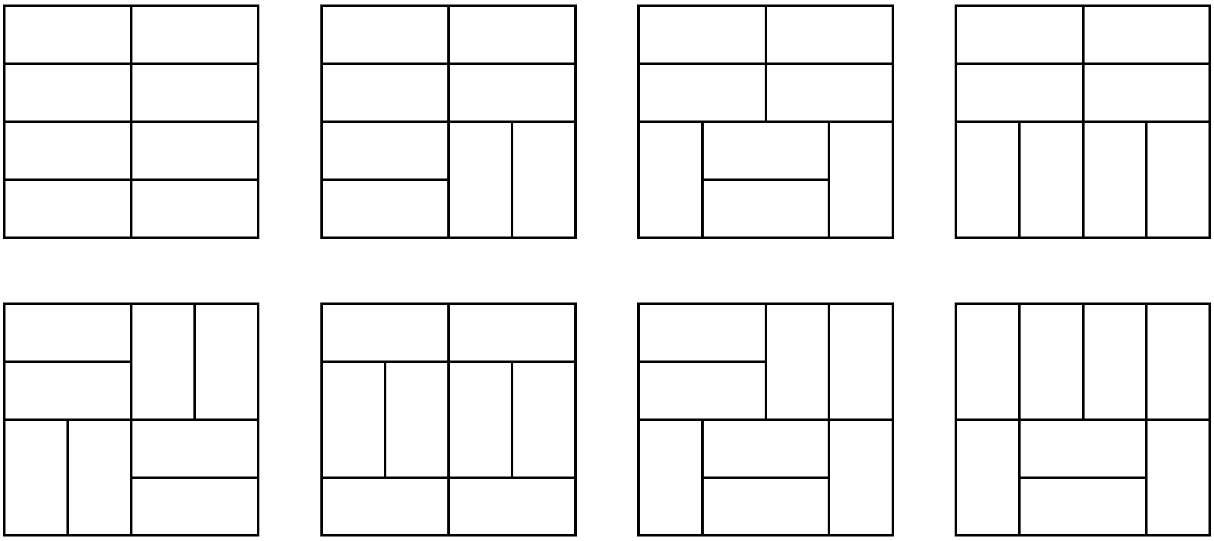
T			
		T	
			T
	T		

T			
			T
		T	
	T		

	T		
T			
			T
		T	

	T		
			T
T			
		T	

50. Er zijn 9 manieren:



Bij de negende oplossing, die we om ruimte te besparen niet afbeelden, worden de vier middelste hokjes door precies twee rechthoeken overdekt.

51. Stel eerst dat de (domino-)steen horizontaal ligt. De positie van de steen is volledig bekend als we weten op welk veld van het schaakbord de linkerhelft L van de steen ligt. Voor de horizontale positie van L zijn er 7 mogelijkheden (want L kan niet op de meest rechtse vertikale rij liggen) en voor de vertikale positie 8 mogelijkheden. In totaal zijn er daarom

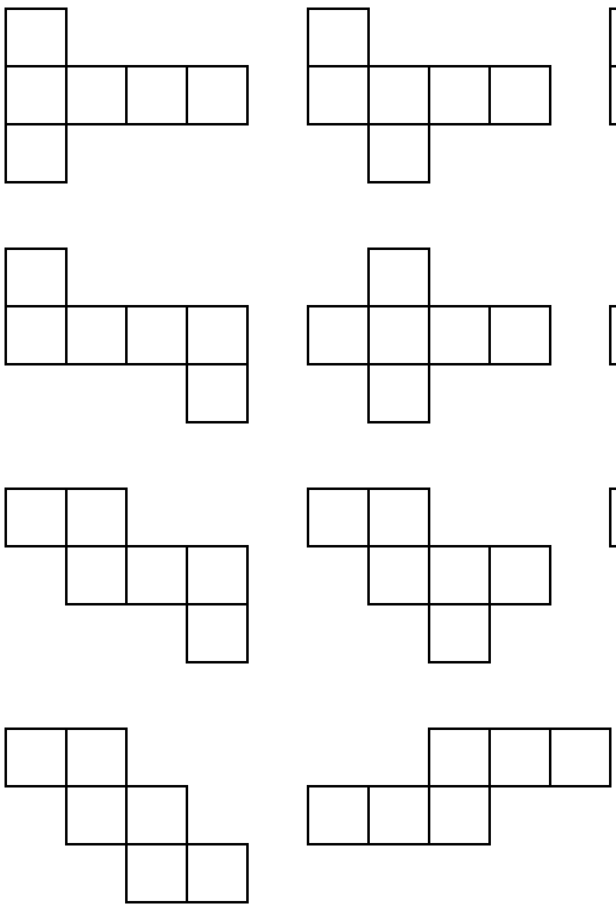
$7 \times 8 = 56$ manieren om de steen horizontaal neer te leggen. Natuurlijk zijn er ook 56 manieren om de steen vertikaal neer te leggen. Dus er zijn $2 \times 56 = 112$ manieren om de steen op het schaakbord te leggen.

Opmerking

Indien de linkerhelft en de rechterhelft van de dominosteen wel verschillend zijn, dan zijn er natuurlijk $2 \times 112 = 224$ manieren om de steen neer te leggen.

Je kunt de dominosteen vervangen door allerlei andere figuren. Men kan bijvoorbeeld een van de figuren van de volgende opgave uitkiezen en onderzoeken op hoeveel manieren deze op het schaakbord kan worden gelegd (waarbij precies zes velden worden overdekt).

52. Er zijn in totaal 11 verschillende bouwplaten:



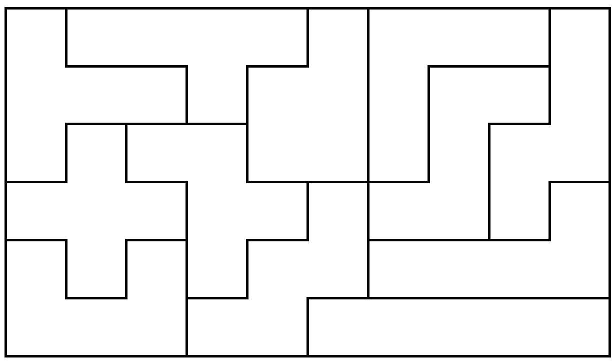
53. Er zijn 12 routes:
A-B-C-D-J , A-B-C-I-J , A-B-E-D-J , A-B-E-K-J , A-B-H-I-J , A-B-H-K-J , A-F-E-D-J , A-F-E-K-J , A-F-L-K-J , A-G-H-I-J , A-G-H-K-J , A-G-L-K-J.
We hebben hier gebruik gemaakt van het *woordenboeksysteem* (kun je deze naam verklaren?).
Zonder alle mogelijkheden uit te schrijven is het ook anders te begrijpen dat het aantal routes gelijk is aan 12. Elke route van A naar J bestaat uit twee stappen naar rechts, één stap naar boven en één stap naar achter. Zo is de route A-B-C-D-J ook op te schrijven als: r-r-a-b
(r = naar rechts, a = naar achter, b = naar boven). Elke route van A naar J is te schrijven als een rijtje ...-...-...-... .

Op elke plaats ... staat een r, a, of b. De letter r komt tweemaal voor, en de beide letters a en b elk eenmaal. Er zijn 4 manieren om de plaats te kiezen waar de letter a komt te staan. Daarna zijn er nog 3 manieren om de plaats te kiezen waar de letter b komt te staan. De twee letters r komen dan op de twee nog openstaande plaatsen (dit kan maar op één manier). Er zijn daarom $4 \times 3 = 12$ manieren om van die rijtjes te maken, dus zijn er ook 12 routes van A naar J.

54. Het uitschrijven van alle mogelijkheden vergt nogal veel werk. We zullen, zoals in de vorige opgave, gebruik maken van rijtjes. Een route van A naar B is te schrijven als een rijtje ...-...-...-...-... . Op elke plaats ... staat een r (= naar rechts), een a (= naar achter), of een b (= naar boven). De letter a komt eenmaal voor en de letters r en b elk tweemaal.

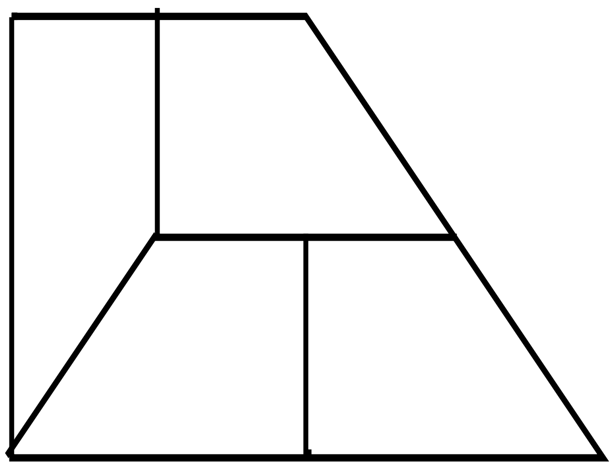
Er zijn 5 manieren om de plaats te kiezen waar de a komt te staan. Daarna moeten de twee letters r en de twee letters b over de 4 open plaatsen verdeeld worden. Dit kan op 6 manieren: rrbb , rbrb , rbbr , brrb , brbr , bbrr. Je kunt daarom $5 \times 6 = 30$ rijtjes maken met de letters a, r, r, b, b. Dus zijn er ook 30 routes van A naar B.

55. Er zijn 12 pentomino's. Ze zijn samen te voegen tot een 6 bij 10 rechthoek.

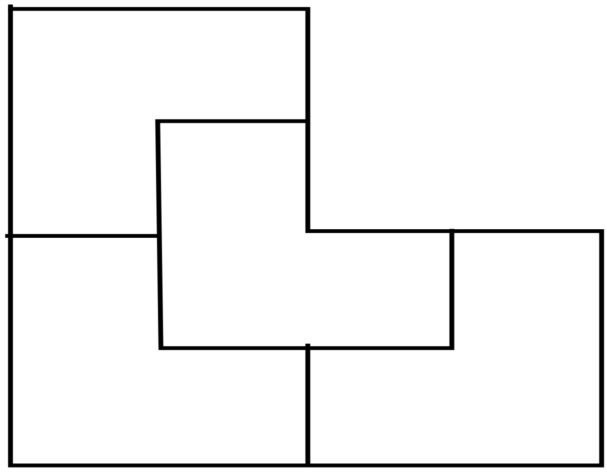


56. De figuur wordt op de wijze die hiernaast is aangegeven in vier congruente stukken verdeeld.

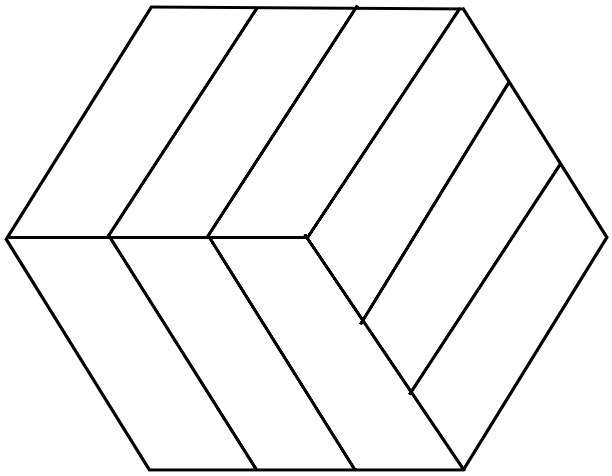
Merk op dat elk stuk dezelfde vorm (maar niet dezelfde grootte) heeft als de gegeven figuur.



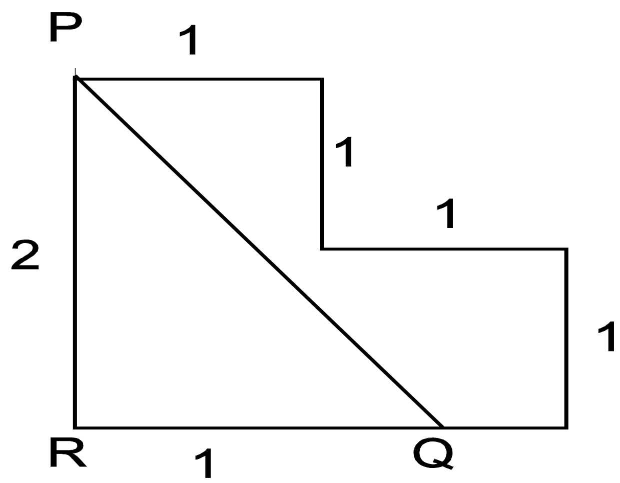
57. Elk van de vier congruente stukken heeft dezelfde vorm als de gegeven figuur.



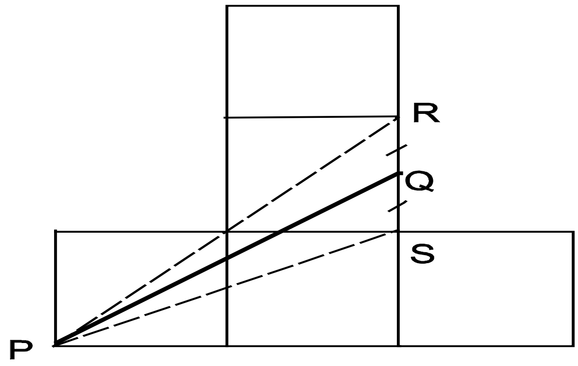
58. Hiernaast is een mogelijke oplossing aangegeven. Omdat 9 = 3×3 ligt het voor de hand om de zeshoek eerst te verdelen in 3 congruente stukken en daarna elk van deze stukken op dezelfde manier verder te verdelen in 3 congruente stukken.



59. Het punt Q op de basis ligt op afstand 1½ van hoekpunt R. De oppervlakte van driehoek PQR is gelijk aan ½ × 1½ × 2 = 1½. Omdat de oppervlakte van de gegeven figuur gelijk is aan 3, verdeelt de lijn PQ de figuur in twee stukken met dezelfde oppervlakte.

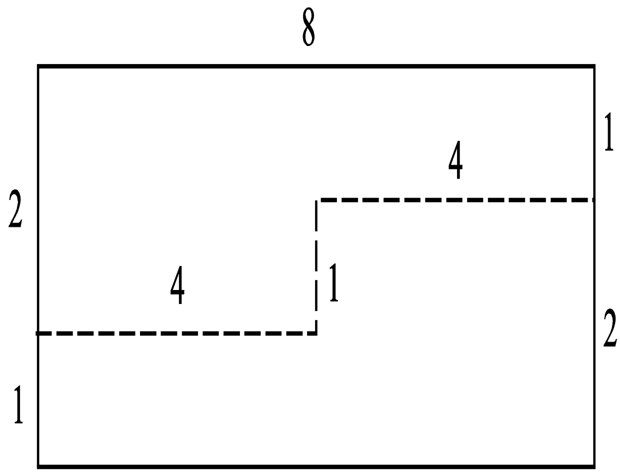


60. Boven de lijn PR en onder de lijn PS liggen twee gedeeltes die beide oppervlakte 2 hebben.
We moeten dus de gezochte lijn PQ zó trekken dat daardoor driehoek PRS in twee stukken met gelijke oppervlakte verdeeld wordt.
Dit is te bereiken door voor Q het midden van lijnstuk RS te nemen.

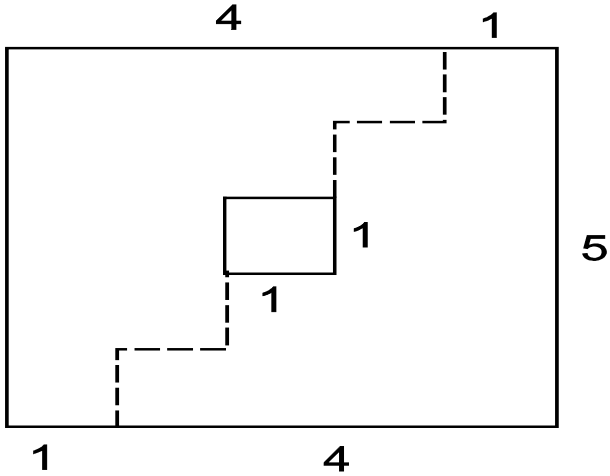


61. Hiernaast is de oplossing aangegeven. Merk op dat beide stukken een kleine *trap* vormen.

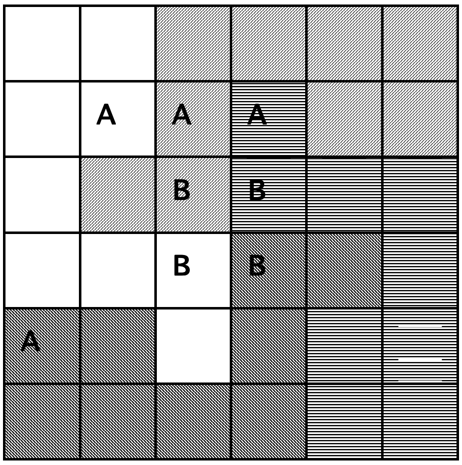
Het vormen van trappen bij dit soort problemen komt vaak voor. De kunst is om het zó te doen dat de treden precies in elkaar passen.



62. Hier maakt men gebruik van de
'trappenmethode", die bij de oplossing
van de vorige opgave is vermeld
.
Elke trede heeft hoogte 1.

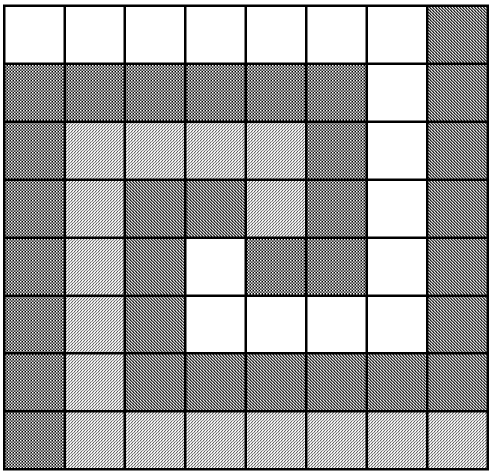


63.

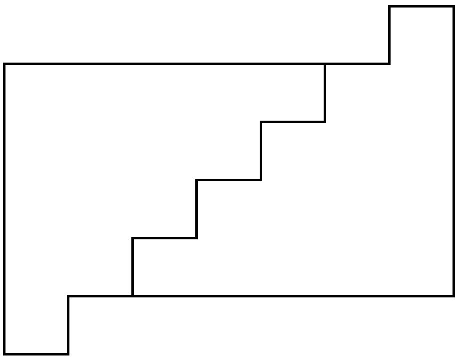


64. Zoals bij de opgaven 61 en 62 is ook hier de trappenmethode succesvol.
Hierbij merken we op dat $16 \times 9 = 144 = 12 \times 12$, dus het vierkant moet de afmeting 12 bij 12 hebben.

65.



66.



Duidelijk is hoe men met de twee trapjes een vierkant kan maken.

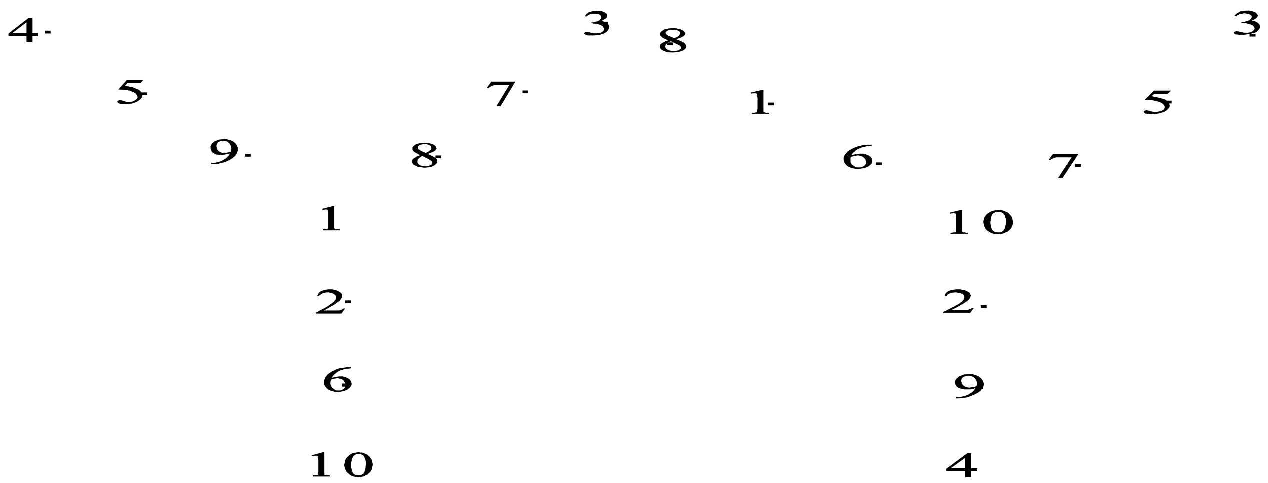
67.

3	3	3	2	1	1	1
3	3	2	2	2	1	1
3	3	2	2	2	1	1

68.

4	9	13	14		
15	1	2	12	10	0
8	6	5	11	3	7

De som van de 16 getallen is 0+15 + 1+14 + 2+13 + 3+12 + 4+11 + 5+10 + 6+9 + 7+8 = 8×15 = 120, dus elke rijsom moet gelijk zijn aan 120/3 = 40.



69.
We hebben twee oplossingen aangegeven. Bij de eerste is de vaste som gelijk aan 19 en bij de tweede gelijk aan 25. De tweede oplossing is zeer snel te vinden met behulp van het magisch vierkant dat in de inleidende tekst bij dit onderwerp is genoemd.
Wat kun je zeggen over het getal dat in het midden komt ?
Noem dit getal g en noem s de vaste som. De som van de getallen 1 t/m 10 is gelijk aan 55. Als je steeds de vier getallen uit één rij optelt en deze drie uitkomsten ook weer optelt, dan krijg je $3\times s$. Maar je ziet ook dat je eigenlijk alle 10 getallen bij elkaar opgeteld hebt; alleen heb je het getal g drie keer meegeteld, dus het getal g heb je twee keer extra meegeteld.
Er geldt daarom: $3\times s = 55 + 2\times g$. Hieraan zie je dat $55 + 2\times g$

deelbaar moet zijn door 3, en dit kan alleen maar als g = 1, 4, 7 of 10 (dus g is een 3-voud + 1). Als je eenmaal voor g één van deze waarden gekozen hebt, dan kun je s berekenen:

$s = (55 + 2\times g) / 3$.

Je vindt dan s = 19, 21, 23 of 25. Voor elk van deze waarden van s kun je eenvoudig een oplossing vinden met s als vaste som.

70. We zullen twee oplossingen aangeven:

1	12	6	3
10			8
7			9
4	5	11	2

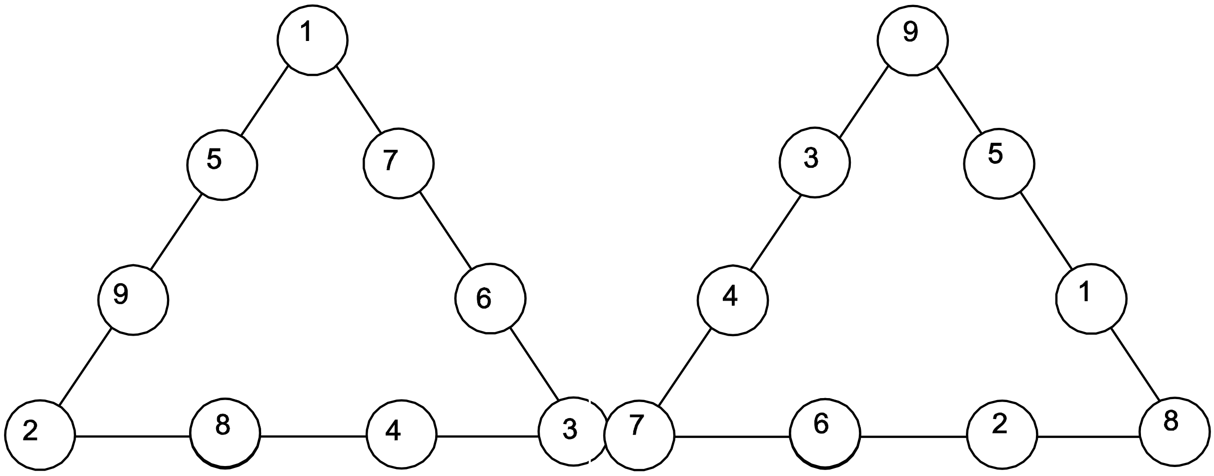
vaste som = 22

11	4	3	12
2			8
7			1
10	6	5	9

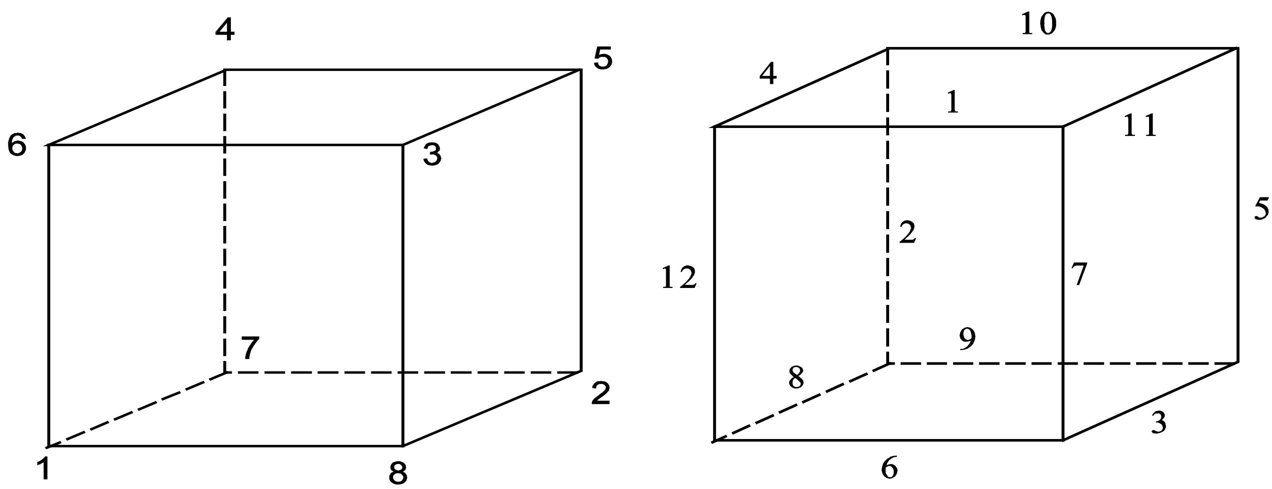
vaste som = 30

Welke waarden kan de vaste som s hebben? Noem h de som van de vier hoekgetallen.

De som van de getallen 1 t/m 12 is gelijk aan 78. Optellen van de vier rijsommen geeft als uitkomst $4\times s$, maar dit is ook gelijk aan 78 + h (omdat de hoekgetallen dubbel worden geteld). Dus $4\times s = 78 + h$. Het getal h is minstens gelijk aan 1+2+3+4 = 10 en hoogstens gelijk aan 9+10+11+12 = 42. Daarom is s minstens gelijk aan 88/4 = 22 en hoogstens gelijk aan 120/4 = 30. Verder onderzoek leert dat er voor elk van de getallen 22 t/m 30
een oplossing van ons probleem bestaat met dat getal als vaste som (kun je dit zelf nagaan?).



71.
We hebben twee oplossingen weergegeven. Noem *s* de vaste som en *h* de som van de hoekgetallen. De som van de getallen 1 t/m 9 is 45. De drie sommen van de getallen langs de zijden zijn samen gelijk aan $3\times s$. Maar dit is ook gelijk aan 45 + *h* (de hoekgetallen worden dubbel geteld). Het getal *h* is minstens gelijk aan 1+2+3 = 6 en is hoogstens gelijk aan 7+8+9 = 24. Dus *s* is minstens gelijk aan 51/3 = 17 en hoogstens gelijk aan 69/3 = 23.
Het blijkt bij nader onderzoek dat slechts *s* = 17, 19, 20, 21 en 23 leiden tot een oplossing.



72.
a) Noem *s* de vaste som. De vier getallen in het ondervlak en ook de vier getallen in het bovenvlak hebben *s* tot som. De som van alle getallen is dus enerzijds gelijk aan $2\times s$ en anderzijds gelijk aan 1+2+3+4+5+6+7+8 = 36. De vaste som *s* is daarom gelijk aan 18.

Verder geldt bijvoorbeeld dat de som van de vier getallen in het voorvlak gelijk is aan de som van de vier getallen in het rechterzijvlak. In beide sommen worden de getallen op de ribbe rechtsvoor meegerekend. Door in beide sommen deze twee getallen weg te laten, zien we in dat de som van de getallen op de ribbe linksvoor gelijk is aan de som van de getallen op de ribbe rechtsachter. Zo zijn er natuurlijk nog vijf andere paren tegenoverstaande ribben met deze eigenschap. Hierna is een oplossing snel te vinden.

b) Noem weer s de vaste som. De som van de getallen 1 t/m 12 is gelijk aan 78.

Er geldt: som getallen voorvlak + som getallen rechtervlak + som getallen achtervlak +

som getallen linkervlak = 4 $\times s$, maar deze som is duidelijk ook gelijk aan

som getallen bovenvlak + som getallen ondervlak + 2×(som getallen opstaande ribben) =

$2\times s$ + 2×(som getallen opstaande ribben).

Er volgt: de som van de getallen langs de opstaande ribben = s.

Evenzo geldt: de som van de getallen langs de ribben die van links naar rechts lopen = s en de som van de getallen langs de ribben die van voor naar achter lopen = s. Elk van de 12 ribben van de kubus kom in precies één van de drie genoemde groepen van vier ribben voor. De som van de getallen langs alle ribben is dus enerzijds gelijk aan $3\times s$ en anderzijds gelijk aan 78. Dit betekent dat s gelijk is aan 26. Hierna kan men na enig proberen een oplossing vinden.

73.

1	9	8
4		5
7		3
6	10	2

vaste som = 18

1	10	8
4		6
5		2
9	7	3

vaste som = 19

10	4	8
2		3
1		5
9	7	6

vaste som = 22

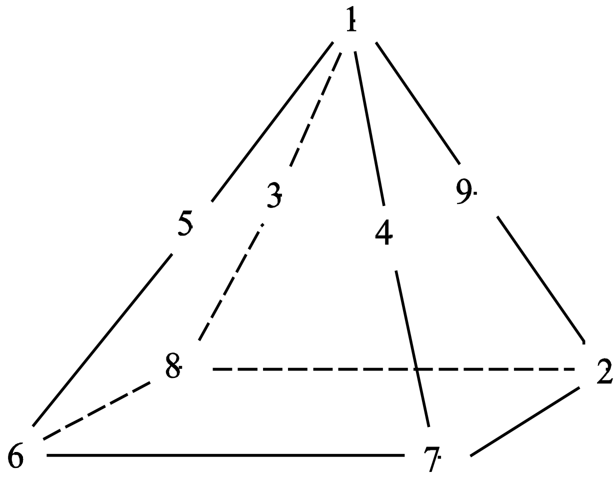
We hebben drie oplossingen afgebeeld. Noem s de vaste som en h de som van de hoekgetallen. De som van de getallen 1 t/m 10 is 55. Er geldt (zie ook opgave 70):

$4\times s = 55 + h$, waaruit volgt dat $55 + h$ een 4-voud is, dus dat h een 4-voud + 1 is.

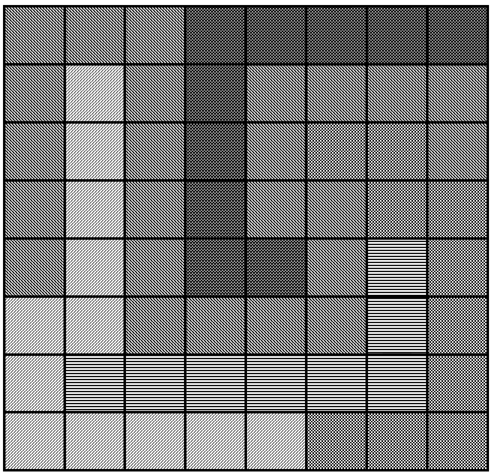
Bovendien is h minstens gelijk aan 1+2+3+4 = 10 en hoogstens gelijk aan 7+8+9+10 = 34.

Dit geeft voor h als mogelijke waarden 13, 17, 21, 25, 29, 33 en dus voor s als mogelijke waarden 17 t/m 22. Niet al deze mogelijke waarden leiden tot een oplossing; zo blijkt bijvoorbeeld s = 17 niet te voldoen.

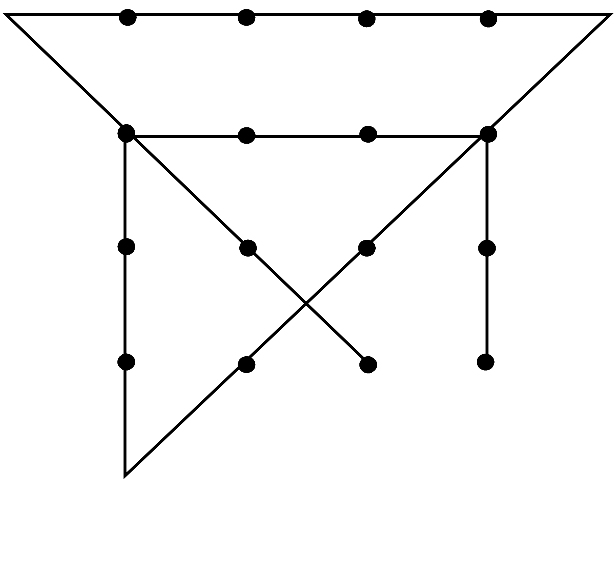
74. Hiernaast is een mogelijke oplossing afgebeeld.



75.



76.



77.

	●	●	
●	●	●	●
●	●		
	●		●

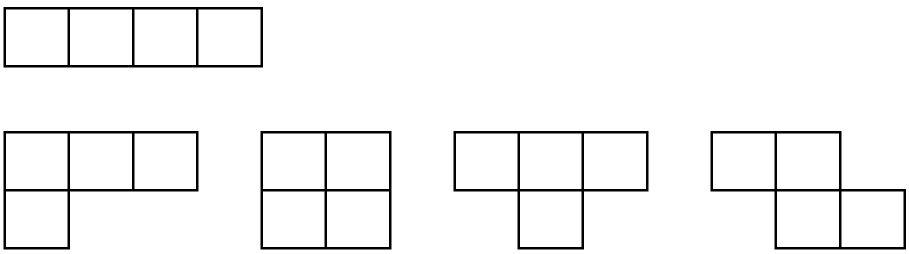
78. Aan de linkerkant ziet het bord er als volgt uit:

8	4	2	1	3	4	2	1	3	2

We zien dat het blokje 4 , 2 , 1 , 3 van vier cijfers steeds terugkeert. Op de velden waarvan het rangnummer deelbaar is door 4 (dus het vierde, achtste, twaalfde, ... veld) staat het cijfer 1. Het getal 1996 is deelbaar door 4, dus op het voorlaatste veld staat een 1.
Op het laatste veld staat daarom een 3.

79. Neem bijvoorbeeld een rechthoek met lengte 1000 cm en breedte 0,01 cm.

80. We maken een indeling in typen (de stand van de figuur is niet van belang)



Het aantal figuren met deze vorm is respectievelijk: 3 , 28 , 6 , 14 , 14 .
Het totaal aantal figuren is daarom gelijk aan 65.

81. Geef de kwartjes van links naar rechts de nummers 1 t/m 15. Een mogelijke oplossing is:

1)	11 → 15		6)	14 → 8
2)	10 → 11		7)	4 → 5
3)	7 → 3		8)	13 → 14
4)	5 → 12		9)	2 → 6
5)	9 → 7		10)	1 → 25

82. Er zijn twee oplossingen:

3	1	2	1	2	2
3	4	0	0	2	2
1	1	0	0	1	4
1	2	3	3	3	4
4	4	4	0	3	0

3	1	2	1	2	2
3	4	0	0	2	2
1	1	0	0	1	4
1	2	3	3	3	4
4	4	4	0	3	0

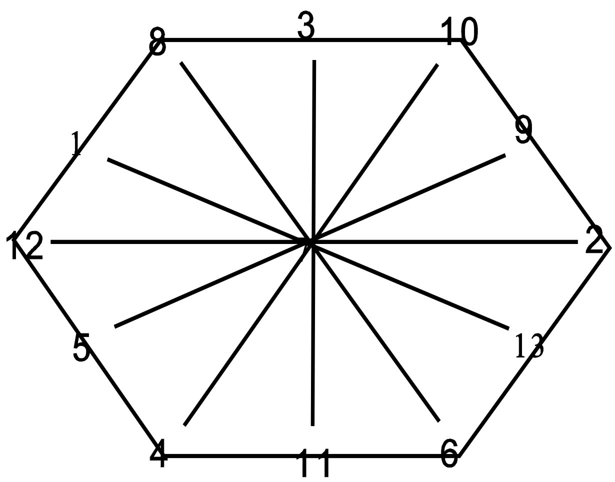
83. a) 1 , 5 , 13 , 25 .
b) $2 \times (1 + 3 + 5 + \ldots + 37) + 29 = 761$;
$2 \times (1 + 3 + 5 + \ldots + 197) + 199 = 19801$
[de n-de figuur bevat $2 \times n^2 - 2 \times n + 1$ vierkantjes].

84.

		5	3	3	3	2		
		6	5	0	6	6		
2	0	5	4	1	3	4	4	5
3	6	6	1	5	1	0	6	5
3	5	6	1	1	2	2	4	2
1	1	3	2	5	4	4	3	4
		0	6	0	1	2		
		4	0	0	0	2		

85. Laat de 7- en 11-minuten zandlopers gelijktijdig lopen. Draai de 7-minuten zandloper na 7 minuten om (dan is al het zand beneden). Draai 4 minuten later, als al het zand in de 11-minuten zandloper beneden is, weer de 7-minuten zandloper om. Wanneer deze laatste zandloper stopt zijn er precies 15 minuten verstreken.

86.



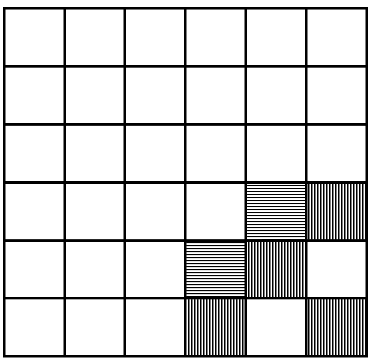
87. Het is onmogelijk!. Na elke zet is er een oneven aantal guldens dat met **M** naar boven ligt.

88.

H	C	A
B	G	E
F	I	D

89. Het antwoord van dit leuke probleem willen we niet verklappen!

90.



a) Een van de vele mogelijkheden is hierboven aangegeven
b) Als er in een horizontale of verticale rij een gearceerd veld voorkomt, dan staat er in die rij minstens nog één ander gearceerd veld. Hieruit volgt (ga na!) dat de zes gearceerde velden precies drie horizontale rijen en precies drie verticale rijen bezetten.

Er zijn 20 manieren om de drie horizontale en 20 manieren om de drie verticale rijen te kiezen waarin de 6 gearceerde velden staan (waarom?), dus zijn er $20 \times 20 = 400$ manieren om het 3 bij 3 vierkant te bepalen waarin de gearceerde velden staan. Daarna zijn er 6 manieren om in dit vierkant 6 velden te kiezen die

gearceerd worden.
Het totaal aantal manieren is daarom gelijk aan $6 \times 400 = 2400$.

91. Met de notatie (a, b, c) bedoelen we: in het 19 liter vat zit a liter wijn, in het 13 liter vat b liter en in het 7 liter vat c liter. De kortste oplossing vergt 16 zetten:
(0, 13, 7) $\to$ (7, 13, 0) $\to$ (19, 1, 0) $\to$ (12, 1, 7) $\to$
(12, 8, 0) $\to$ (5, 8, 7) $\to$ (5, 13, 2) $\to$ (18, 0, 2) $\to$
(18, 2, 0) $\to$ (11, 2, 7) $\to$ (11, 9, 0) $\to$ (4, 9, 7) $\to$
(4, 13, 3) $\to$ (17, 0, 3) $\to$ (17, 3, 0) $\to$ (10, 3, 7) $\to$
(10, 10, 0).

92. We kunnen de situatie weergeven door het volgende schema:

1	**4**	**9**	**6**	**2**	**8**	**5**	**3**	**7**
4	9	6	1	8	5	2	7	3

In de eerste rij staan de fiches en in de tweede rij is aangegeven welke plaats de er bovenstaande fiche inneemt. Dus **1** staat op plaats 4, **4** staat op plaats 9, enzovoorts.
We moeten de fiches zó verwisselen, dat ze boven hetzelfde nummer in de tweede rij komen te staan. Dit kun je bereiken door een 'opschuifmethode' binnen een groepje:
1 $\leftrightarrow$ **4** , **1** $\leftrightarrow$ **9** , **1** $\leftrightarrow$ **6** , **2** $\leftrightarrow$ **8** , **2** $\leftrightarrow$ **5** , **3** $\leftrightarrow$ **7** .

93. We gebruiken een soortgelijk schema als in de vorige opgave:

1	**2**	**3**	**4**	**16**	**15**	**5**	**18**	**9**	**14**	**22**	**23**	**21**	**6**	**8**
2	3	1	16	15	4	18	9	14	22	23	21	6	8	5

7	**20**	**17**	**10**	**12**	**11**	**24**	**13**	**19**
20	17	7	12	11	24	10	13	19

De oplossing is nu simpel:
1 $\leftrightarrow$ **2** , **1** $\leftrightarrow$ **3** , **4** $\leftrightarrow$ **16** , **4** $\leftrightarrow$ **15** , **5** $\leftrightarrow$ **18** , **5** $\leftrightarrow$ **9** ,
5 $\leftrightarrow$ **14** , **5** $\leftrightarrow$ **22** , **5** $\leftrightarrow$ **23** , **5** $\leftrightarrow$ **21** ,**5** $\leftrightarrow$ **6** , **5** $\leftrightarrow$ **8** ,
7 $\leftrightarrow$ **20** , **7** $\leftrightarrow$ **17** , **10** $\leftrightarrow$ **12** , **10** $\leftrightarrow$ **11** , **10** $\leftrightarrow$ **24** .

94. Duidelijk is dat er 11 stenen zijn waarbij op de beide helften een gelijk aantal stippen staat.
Kijken we nu naar de stenen waarbij op de beide helften een verschillend aantal stippen staat. De linkerhelft kan op 11 manieren van stippen worden voorzien. Daarna zijn er nog 10 mogelijkheden voor de rechterhelft. Dus zijn er $11 \times 10 = 110$ van die stenen.
Maar hierbij heb je elke steen dubbel geteld: een steen met

bijvoorbeeld 3 stippen links en 8 stippen rechts is dezelfde steen als die met 8 stippen links en 3 stippen rechts. Er zijn daarom in werkelijkheid maar 110/2 = 55 van die stenen.
Het totaal aantal stenen is dus: 11 + 55 = 66.
[als je op beide helften 0 t/m *n* stippen mag zetten, dan zijn er $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ stenen].